



**EDUCACIÓN**  
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO

**EL TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO  
A TRAVÉS DEL CENTRO NACIONAL DE INVESTIGACIÓN  
Y DESARROLLO TECNOLÓGICO**

OTORGA EL PRESENTE

**RECONOCIMIENTO**

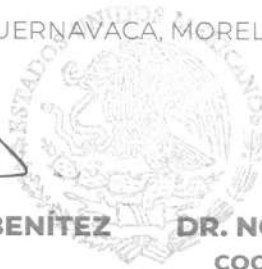
a

**Manuel Salgado, Claudia Cortés, Dariusz Szwedowicz, Eladio  
Martínez, Quirino Estrada, Jorge Bedolla**

POR HABER OBTENIDO EL **2do LUGAR** DEL ÁREA DE  
**MECÁNICA**, CON LA PONENCIA **“RESISTENCIA DE LA UNIÓN  
EJE/CUBO MEDIANTE UN MODELO POR ELEMENTOS  
FINITOS”** DURANTE LA **3ra JORNADA DE CIENCIA Y  
TECNOLOGÍA APLICADA.**

CUERNAVACA, MORELOS, MÉXICO, NOVIEMBRE 14 Y 15, 2019.

**DRA. YESICA IMELDA SAAVEDRA BENÍTEZ**  
DIRECTORA



**DR. NOÉ ALEJANDRO CASTRO SÁNCHEZ**  
COORDINADOR GENERAL DE LA JORNADA

S. E. P.

CENTRO NACIONAL DE INVESTIGACION  
Y DESARROLLO TECNOLÓGICO

**cenidet**<sup>®</sup>  
Centro Nacional de Investigación  
y Desarrollo Tecnológico



**Folio 4218-19**

El Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico  
avala la autenticidad de este reconocimiento  
expedido el 15 de noviembre de 2019.



Dr. Gerardo Vicente Guerrero Ramírez  
Subdirector Académico



SEP TecNM  
CENTRO NACIONAL  
DE INVESTIGACIÓN  
Y DESARROLLO  
TECNOLÓGICO  
SUBDIRECCIÓN  
ACADÉMICA

# Resistencia de la unión eje/cubo mediante un modelo por elementos finitos

Salgado C. Manuel\*. Cortés G. Claudia\*. Szwedowicz W. Dariusz\*. Martínez R. Eladio\*  
Estrada Quirino\*\*. Bedolla H. Jorge\*\*\*

\* *Tecnológico Nacional de México/CENIDET, Cuernavaca, Morelos*  
*e-mail: manuelsc@cenidet.edu.mx.*

\*\* *Instituto de Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma, Ciudad Juárez, Chihuahua.*

\*\*\* *Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Apizaco, Apizaco, Tlaxcala.*

---

**Abstract:** The present work describes a finite element model of a shaft/hub joint with an interference fit of  $\text{Ø}20\text{H}7/\text{s}6$ ; which aims to evaluate and analyze the axial strength of the joint according to the surface roughness of the parts in contact. This surface roughness is a function of the normal contact stiffness. First the model was validated with the thick-walled cylinder equations. Then it was evaluated and analyzed with the normal contact stiffness. The model was made with a software of finite element. The results obtained show that the surface roughness contributes to the reduction of the load capacity of this type of joints.

**Keywords:** Normal contact stiffness, surface roughness, extraction force.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Las uniones eje/cubo se basan en el principio de los ajustes de interferencia. Dependen de la diferencia de diámetros para poder realizarse la unión. El ensamble se realiza por prensa o temperatura. La ausencia de sujeción convencional como el uso de llaves, rosca o cuñas, los hace compactos y estéticos en apariencia (Ramachandran and Radhakrishnan, 1974). Debido al bajo costo de fabricación, el fácil montaje y la integridad compacta, los ajustes de interferencia proporcionan momentos de torsión y fuerzas axiales elevadas (Buczowski and Kleiber, 2016).

Sus aplicaciones son: en portaherramientas de corte, ruedas y bandas para material ferroviario, discos de turbina, rotores para motores eléctricos, poleas y para ubicar rodamientos de bolas y rodillos. También son una forma efectiva de ensamblar elementos de la máquina, como un engrane a un eje para transmitir el par y resistir el empuje axial a través de la resistencia a la fricción (Booker and Truman, 2011).

Los factores que afectan el rendimiento de un ajuste de interferencia son: (1) diámetro del eje; (2) diámetro externo del cubo; (3) longitud de la articulación; (4) cantidad de interferencia; (5) propiedades del material del eje y el cubo; (6) acabado superficial de las superficies de contacto (Ramachandran and Radhakrishnan, 1974).

El efecto de los cinco primeros factores sobre la capacidad de carga de un ajuste de interferencia puede determinarse

matemáticamente utilizando la teoría de la elasticidad para cilindros presurizados (Budynas and Nisbett, 2008). Pero, el efecto del acabado superficial de las superficies de contacto es complejo de analizar por cálculos teóricos, ya que se tiene que considerar la naturaleza irregular de las superficies de contacto (Ramachandran and Radhakrishnan, 1974). Dentro del acabado superficial, el parámetro con mayor influencia es la rugosidad superficial.

Buscando en la literatura los estudios o técnicas que consideran la rugosidad en la resistencia de las uniones eje/cubo, tenemos:

(Yang *et al.*, 2001) mostraron que las rugosidades juegan un papel importante y positivo en el ajuste cilíndrico de interferencia, recomiendan utilizar procesos de fabricación económicos como el torneado para producir las superficies de ajuste, en lugar de métodos como el pulido que son mucho más caros.

(Yang *et al.*, 2002) proponen un modelo sencillo para calcular la presión real de un ajuste con interferencia. Este modelo consiste en la sustitución de la compleja área real para un área equivalente.

(Boutoutaou *et al.*, 2011) analizaron la fuerza de extracción para la unión eje-cubo de forma numérica variando defectos de forma (lóbulos). Concluyeron que la fuerza de extracción incrementa conforme se aumenta el número de lóbulos.

(Boutoutaou *et al.*, 2013) presentaron una técnica de homogeneización numérica en el comportamiento de un

ajuste de interferencia por temperatura. Este enfoque permite tomar en cuenta la influencia de la rugosidad en el modelado de piezas industriales que por lo general tienen una geometría compleja. Los resultados del modelado mostraron que la predicción de la resistencia a la extracción en el uso de los elementos homogenizados se mejoró en comparación con un enfoque que considera las superficies en contacto entre las dos partes ensambladas perfectamente lisas (sin rugosidad).

(Buczowski and Kleiber, 2016) proporcionaron una metodología para mejorar el diseño de un ensamblaje por temperatura. Consideraron la rugosidad de las piezas e introdujeron una ley de endurecimiento por fricción no clásica en la cual los micro-deslizamientos tangenciales son considerados. Concluyeron en que las superficies lisas logran una mayor capacidad de carga.

Como se puede observar en esta revisión de los trabajos, encontramos dos vertientes. Una menciona que la rugosidad genera una mayor resistencia axial, pero cabe resaltar que toman como referencia la línea media del perfil de rugosidad como el diámetro nominal de la pieza. La otra vertiente concluye que las superficies lisas contribuyen a una mayor resistencia de la unión; el perfil de rugosidad se considera en que no sobrepase el diámetro nominal. Esta forma de analizar la rugosidad se considera más apegada con la realidad de la medición de los diámetros de las piezas que formarán la unión eje/cubo. En la Fig. 1 se muestra un ejemplo de cómo se considera el perfil de rugosidad superficial con respecto al diámetro nominal de la pieza, en donde se considera que los picos del perfil de rugosidad no sobrepasen el diámetro nominal.

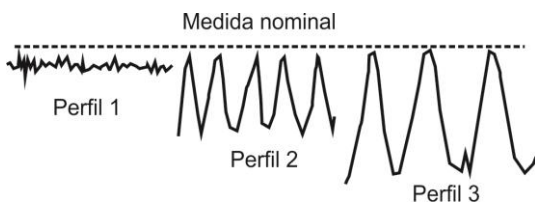


Fig. 1. Consideración del diámetro nominal respecto al perfil de rugosidad.

Debido a estas incertidumbres se plantea la hipótesis para conocer el efecto de la rugosidad superficial en la capacidad de carga de la unión eje/cubo. Para ello se desarrollará un modelo por elementos finitos con el objetivo de analizar y evaluar la resistencia axial de una unión eje-cubo Ø20 H7/s6, basándose el estudio en la rigidez normal de contacto, la cual estará en función de la rugosidad superficial de la superficie. Esta rigidez normal de contacto representará la compleja geometría del perfil de rugosidad para un modelado ligero y

práctico, ya que muchas veces el modelado de la rugosidad complica este tipo de análisis por la gran cantidad de malla a utilizar y el contacto irregular de las superficies.

## 2. MARCO TEÓRICO

Esta sección presenta las ecuaciones requeridas para medir la presión de contacto, la fuerza de extracción y los esfuerzos radiales y tangenciales. Además, se presenta la ecuación que considera la rugosidad superficial por medio de la rigidez normal de contacto.

### 2.1 Presión de contacto

Según Budynas and Nisbett, (2008), cuando se ensamblan dos partes cilíndricas por contracción o a presión una sobre la otra, se crea una presión de contacto  $p$  entre las dos partes.

$$p = \frac{\delta}{\frac{d}{E_o} \left( \frac{d_o^2 + d^2}{d_o^2 - d^2} + \nu_o \right) + \frac{d}{E_i} \left( \frac{d^2 + d_i^2}{d^2 - d_i^2} - \nu_i \right)} \quad (1)$$

Cuando el eje y el cubo son del mismo material, sería:

$$p = \frac{E\delta}{2d^3} \left[ \frac{(d_o^2 - d^2)(d^2 - d_i^2)}{d_o^2 - d_i^2} \right] \quad (2)$$

donde:  $d$  es el diámetro nominal del eje,  $d_i$  es el diámetro interno (si hay alguno) del eje,  $d_o$  es el diámetro externo del cubo,  $E$  es el módulo de Young y  $\nu$  es la relación de Poisson, con subíndices  $o$  e  $i$  para el cubo y el eje, respectivamente. Por su parte,  $\delta$  es la interferencia diametral entre el eje y el cubo, esto es, la diferencia entre el diámetro externo del eje y el diámetro interno del cubo (ver Fig. 2).

$$\delta = d_{eje} - D_{cubo} \quad (3)$$

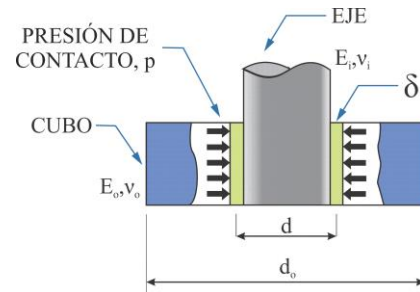


Fig. 2. Parámetros que intervienen en la presión de contacto de la unión eje/cubo.

Como habrá tolerancias en ambos diámetros, la presión mínima y máxima puede encontrarse mediante la aplicación de las interferencias mínima y máxima (Fig. 3), se expresan en la ecuación (4) y (5) respectivamente.

$$\delta_{\min} = d_{\min} - D_{\max} \quad (4)$$

$$\delta_{\max} = d_{\max} - D_{\min} \quad (5)$$

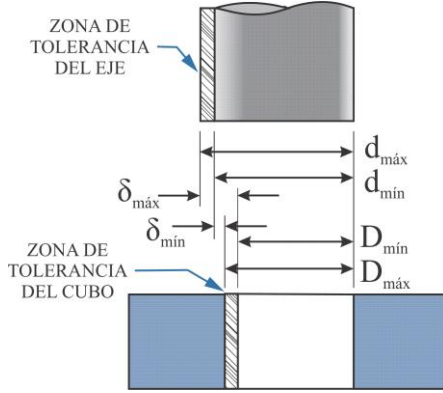


Fig. 3. Interferencia mínima y máxima por las tolerancias del eje y el cubo.

## 2.2 Esfuerzos radiales y tangenciales

Los esfuerzos debidos a un ajuste por interferencia pueden obtenerse si se considera al eje como un cilindro con presión externa uniforme, y el cubo como un cilindro hueco con una presión interna uniforme. Los esfuerzos tangenciales en el contacto del eje y el cubo son,

$$\sigma_{t, \text{ eje}} = -p \frac{d^2 + d_i^2}{d^2 - d_i^2} \quad (6)$$

$$\sigma_{t, \text{ cubo}} = -p \frac{d_o^2 + d^2}{d_o^2 - d^2} \quad (7)$$

los esfuerzos radiales en el contacto son simplemente,

$$\sigma_{r, \text{ eje}} = -p \quad (8)$$

$$\sigma_{r, \text{ cubo}} = -p \quad (9)$$

## 2.3 Fuerza de extracción

La fuerza de extracción o resistencia axial es el producto del coeficiente de fricción estático  $\mu_s$  y la carga normal  $W$  que actúa en la interfaz de contacto entre el eje y el cubo. La

carga normal puede representarse mediante el producto de la presión  $p$  y el área nominal de contacto  $A_0$ . Por lo tanto, la fuerza de extracción  $F_{\text{extracción}}$  es:

$$F_{\text{extracción}} = \mu_s W = \mu_s (p A_0) = \mu_s p \pi d L_c \quad (10)$$

donde:  $L_c$  es la longitud del cubo.

## 2.4 Consideración de la rugosidad por medio de la rigidez normal de contacto

Para considerar el efecto de la rugosidad superficial en el contacto normal, (Buczkowski and Kleiber, 2016) recomiendan que para aplicaciones en ingeniería, la rigidez normal de contacto de superficies rugosas  $k_n$  para una presión nominal  $W/A_0$  puede ser estimada por la siguiente ecuación:

$$k_n = \frac{3 W}{2 A_0 \sigma} \quad (11)$$

donde:  $W$  es la carga normal de contacto,  $A_0$  es el área nominal de contacto y  $\sigma$  denota la desviación estándar de la superficie rugosa. La Fig. 4 muestra cómo el contacto real de la rugosidad superficial puede ser representado por una rigidez normal de contacto.

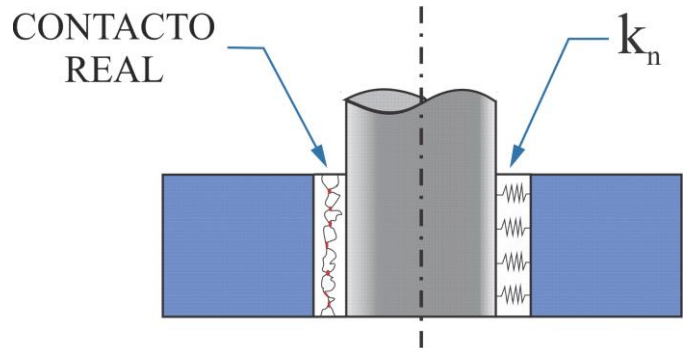


Fig. 4. Consideración de la rugosidad por medio de la rigidez normal de contacto.

### 3. MODELO POR ELEMENTO FINITO

#### 3.1 Datos del ajuste

La unión eje/cubo analizada tiene un ajuste de interferencia de  $\text{Ø}20\text{H}7/\text{s}6$ . Los valores de los diámetros y de la interferencia se muestran en la Fig. 5.

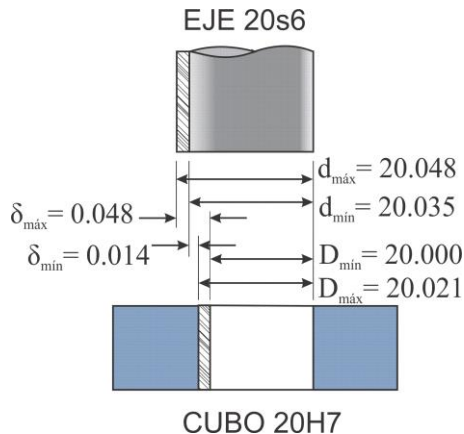


Fig. 5. Valores del ajuste  $\text{Ø}20\text{H}7/\text{s}6$  para el modelo de elementos finitos en milímetros.

#### 3.2 Material

El material utilizado en este estudio fue acero AISI 1045. Las propiedades del acero se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Propiedades del acero AISI 1045.

Módulo de Young ( $E$ )	$205 \times 10^3 \text{ MPa}$
Relación de Poisson ( $\nu$ )	0.29
Esfuerzo de fluencia ( $\sigma_y$ )	$350 \text{ MPa}$

#### 3.3 Consideraciones

- El eje y el cubo se consideran lisos. Se considera la rugosidad superficial por medio de un valor de rigidez normal de contacto ( $k_n$ ) en la interacción.
- La opción “interference fit” se utiliza para realizar el ensamble. Por lo cual no se considera la temperatura que se utiliza para realizar el ensamble.
- El coeficiente de fricción depende de muchos parámetros (es decir, interferencia, superficies, esfuerzos de trabajo, concentración de esfuerzos, desgaste, ensamblaje, temperatura, entre otros). Se sabe que el coeficiente de fricción a presiones de ajuste por contracción es mucho más

bajo que el indicado para cargas normales bajas (Bhushan, 1999). Booker and Truman, (2004) han demostrado que el coeficiente de fricción es independiente del área. Por lo tanto, el coeficiente de fricción se considera idéntico para cada prueba. Se elige a un valor convencional de 0.15 entre acero-acero;

- El modelado se realiza con un software de elementos finitos.

#### 3.4 Modelado numérico

Se crearon el eje y el cubo, se les asignó el mismo material (acero AISI 1045). Se declararon dos pasos para su análisis; en el paso 1 se realiza el ensamble por medio de la opción “interference fit” de elemento finito y en el paso 2 se realiza la extracción axial del eje para determinar la carga que soporta la unión. En la Fig. 6 se muestra el paso 1 “ensamble” en una vista isométrica con una sección a  $180^\circ$ .

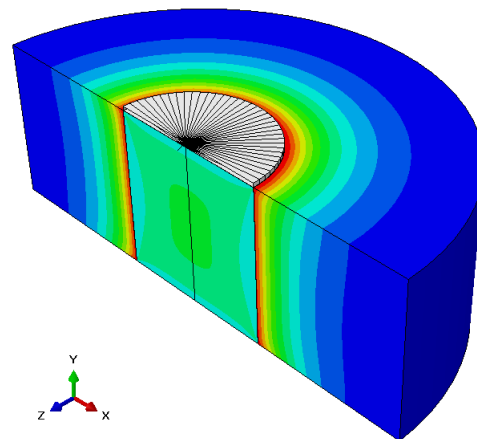


Fig. 6. Paso 1 “ensamble” del ajuste  $\text{Ø}20\text{H}7/\text{s}6$  para el modelo de elementos finitos.

Se formaron dos interacciones; una entre el eje y el cubo, donde el contacto normal está en función de la rigidez de contacto de la ecuación (11), y al contacto tangencial se le asignó un valor de coeficiente de fricción de 0.15. La segunda interacción se realizó entre el eje y el cuerpo rígido para obtener la fuerza de extracción por medio de la fuerza normal de contacto por sus siglas en inglés “CFN”.

Las condiciones de frontera fueron un empotramiento en la parte inferior del cubo y un desplazamiento de 20 mm en la dirección “y” sobre el punto de referencia “RP” (ver Fig. 7).

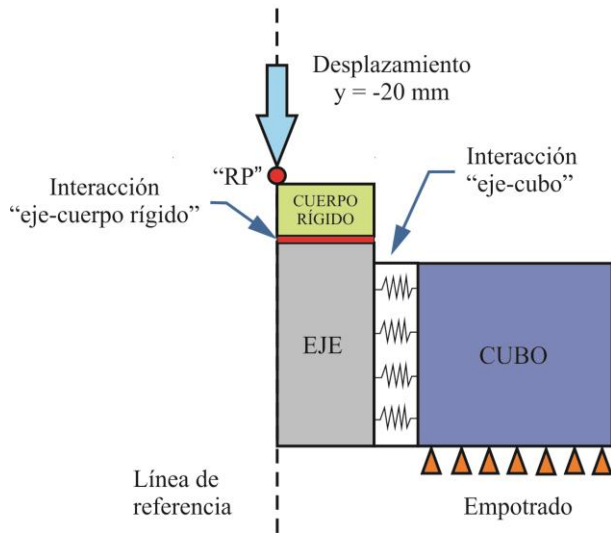


Fig. 7. Condiciones de frontera y carga.

Las condiciones de frontera y carga se aplicaron en el paso 2 “extracción” (Fig. 8), ya que en el paso 1 “ensamble” se realiza sin condiciones de frontera. El mallado de las piezas fue de 0.2 mm. El tipo de elemento que se utilizó fue el CAX4R (“A 4-node bilinear quadrilateral axisymmetric, reduced integration, hourglass control”).

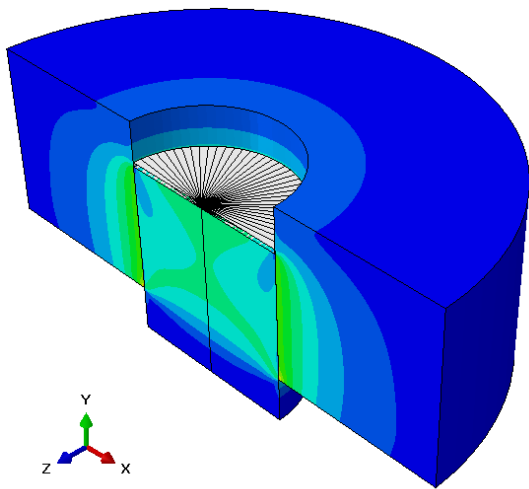


Fig. 8. Paso 2 “extracción” del eje del ajuste Ø20H7/s6.

#### 4. COMPARACIÓN NUMÉRICA - TEÓRICA

Primeramente se realizó una comparación numérica-teórica para tener un punto de partida del estudio. Se comparó la presión de contacto y la fuerza de extracción con la finalidad de validar el modelo por elemento finito. En la Tabla 2 se muestran los resultados.

Tabla 2. Comparación numérica-teórica.

<b>Interferencia mínima</b>	Teórico	Numérico	% diferencia
Presión de contacto (MPa)	63.77	62.81-65.03	-1.5 – 1.97
Fuerza de extracción (N)	12,021.82	12,914.30	7.7
<b>Interferencia máxima</b>	Teórico	Numérico	% diferencia
Presión de contacto (MPa)	218.66	218.67-225.07	0.004 – 2.9
Fuerza de extracción (N)	41,217.69	44,278.40	7.4

La variación de la presión de contacto se atribuye a que en la ecuación (1) dan un mismo valor para todo el contacto entre las superficies del eje y el cubo. En cambio en el modelo por elemento finito la presión de contacto incrementa en el centro del contacto debido al coeficiente de fricción. Estas variaciones contribuyen también a un aumento de la fuerza de extracción en el modelo numérico. Por lo tanto, no significa que este mal el modelo por MEF, sino que la ecuación de presión de contacto no considera estas variaciones. En la Fig. 9 y 10 se muestra la gráfica de la comparación de la presión de contacto para una interferencia mínima y máxima del ajuste Ø20H7/s6 respectivamente.

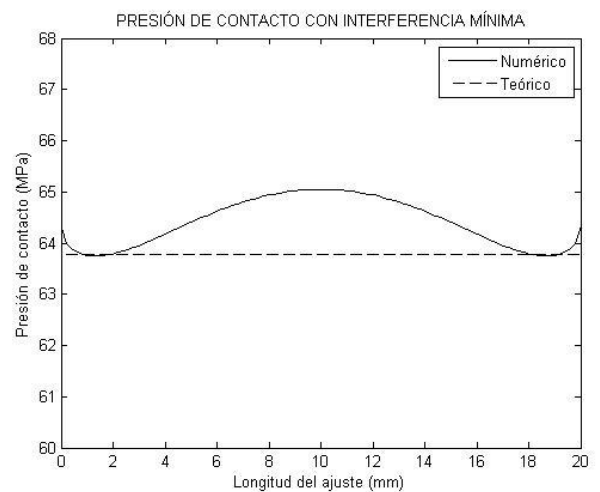


Fig. 9. Gráfica de la presión de contacto con interferencia mínima.

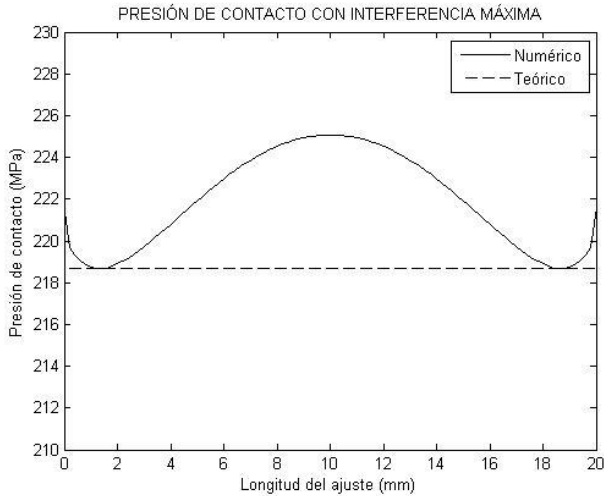


Fig. 10. Gráfica de la presión de contacto con interferencia máxima.

### 5. RESULTADOS

A continuación se muestran los resultados obtenidos de la fuerza de extracción del modelo por el método de elemento finito de la unión eje-cubo con ajuste de interferencia Ø20H7/s6, en donde se varió el valor de la desviación estándar de la rugosidad. Ver la Tabla 3.

Tabla 3. Resultados de la fuerza de extracción de acuerdo a los valores de desviación estándar de la rugosidad.

Desv. $\sigma$ (micras)	Fuerza de extracción mínima (N)	% de diferencia respecto al liso
Liso	12,914.30	-----
0.1	12,787.00	-0.98
0.5	12,285.70	-4.86
1	11,712.60	-9.30
5	8,535.00	-33.91
Desv. $\sigma$ (micras)	Fuerza de extracción máxima (N)	% de diferencia respecto al liso
Liso	44,278.40	-----
0.1	44,165.40	-0.25
0.5	43,638.00	-1.44
1	42,960.30	-2.97
5	38,507.30	-13.03

También se graficó la fuerza de extracción mínima y máxima de la unión eje-cubo a lo largo de sus 20 mm de longitud del ajuste (Fig. 11 y 12).

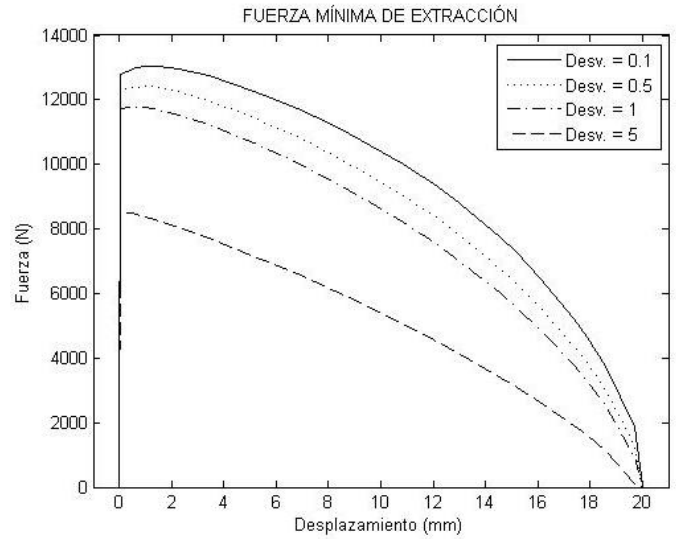


Fig. 11. Gráfica de la fuerza mínima de extracción.

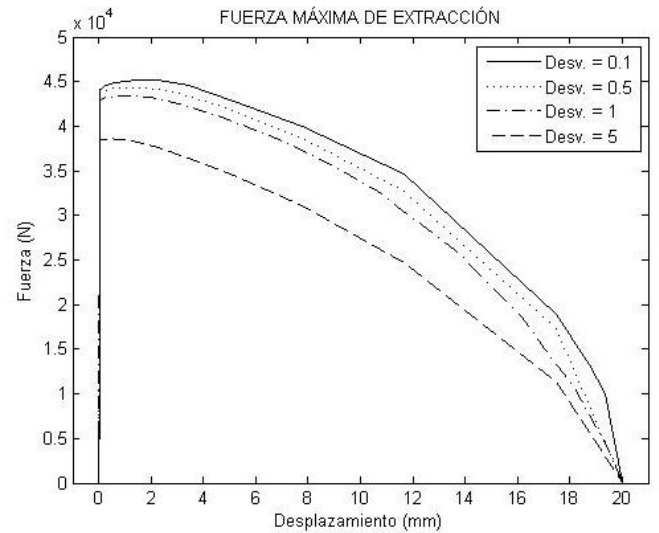
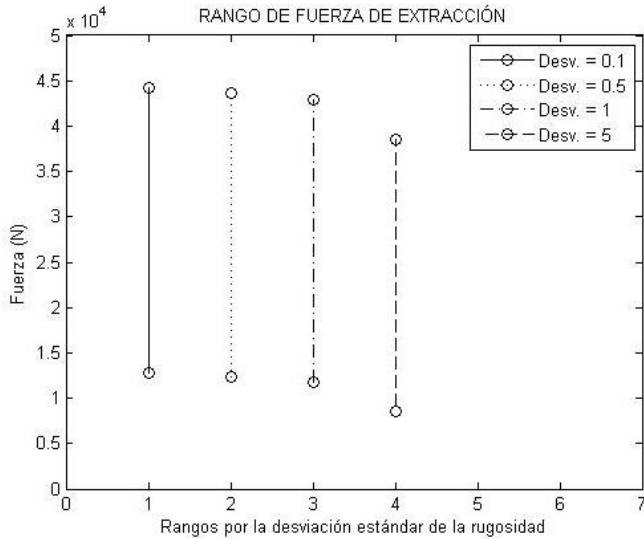


Fig. 12. Gráfica de la fuerza máxima de extracción.

Finalmente, se graficó la variación de los rangos de fuerza de extracción en función de la desviación estándar de la rugosidad superficial de las piezas (Fig. 13).





## REFERENCIAS

Bhushan (1999) *Principles and applications of tribology*. Edited by Wiley.

Booker and Truman (2004) 'A comparison of shrink-fit holding torque using probabilistic, micro-mechanical and experimental approaches.', *Proc Inst Mech Eng*, part B, pp. 175–87.

Booker and Truman (2011) 'Measuring the coefficient of friction for use in shrink-fit calculations', *TECHNIQUES*, (April), pp. 7–13. doi: 10.1111/j.1747-1567.2009.00593.x.

Boutoutaou, Bouaziz and Fontaine (2011) 'Modeling of interference fits taking form defects of the surfaces in contact into account', *Materials and Design*. Elsevier Ltd, 32(7), pp. 3692–3701. doi: 10.1016/j.matdes.2011.03.059.

Boutoutaou, Bouaziz and Fontaine (2013) 'Modelling of interference fits with taking into account surfaces roughness with homogenization technique', *International Journal of Mechanical Sciences*, 69, pp. 21–31. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2013.01.012.

Buczowski and Kleiber (2016) 'A study of the surface roughness in elasto-plastic shrink fitted joint', *Tribology International*. Elsevier, 98, pp. 125–132. doi: 10.1016/j.triboint.2016.02.021.

Budynas and Nisbett (2008) *Diseño en ingeniería mecánica de Shigley*. México, D.F.: The McGraw-Hill.

Ramachandran and Radhakrishnan (1974) 'Influence of surface finish on interference fits', *International Journal of Production Research*, 12(6), pp. 705–719. doi: 10.1080/00207547408919587.

Yang *et al.* (2001) 'Influence of roughness on characteristics of tight interface fit of a shaft and a hub', *International Journal of Solids and Structures*, 38(42–43), pp. 7691–7701. doi: 10.1016/S0020-7683(01)00035-X.

Yang *et al.* (2002) 'Contact pressure between two rough surfaces of a cylindrical fit', *Journal of Materials Processing Technology*, 123, pp. 490–497.

Fig. 13. Gráfica de los rangos de fuerza de extracción.

## 6. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos demuestran que la rugosidad superficial contribuye a la disminución de la capacidad de carga de este tipo de uniones. Para todos los valores de desviación estándar de la rugosidad superficial, se redujo la fuerza de extracción. Debido a la rugosidad superficial, el ajuste Ø20H7/s6 de la unión reduce su rango de capacidad de carga.

Cabe mencionar que con un valor de  $\sigma=5$  se reduce la resistencia de la unión un 13.03 y 33.91 % para una interferencia máxima y mínima respectivamente, con relación al modelo de superficies lisas.

El modelado de las uniones eje-cubo por medio de la rigidez normal de contacto para representar la compleja geometría de la rugosidad superficial de las piezas genera un modelado ligero y práctico, Muchas veces el modelado de la rugosidad complica este tipo de análisis por la gran cantidad de malla a utilizar y el contacto irregular de las superficies, lo cual se ve reflejado en un incremento del costo computacional. También cabe resaltar que sería importante analizar el comportamiento local de las rugosidades en la interfaz de contacto de la unión eje-cubo.