

## **UNA FORMA INTERACTIVA DE ENTENDER SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN REUTILIZANDO RECIPIENTES COTIDIANOS**

Keops García-Galván, Brandón Morales Olguín, Alejandro Valdivieso Oviedo, Hannia Janet López Ángeles, Karen Yazareth Gonzaga Rivas, Abdiel Ramírez Reyes, José Roberto Contreras Bárbara

Instituto Tecnológico de Atitalaquia. Av. Tecnológico No. 9, Tezoquipa, Atitalaquia Hidalgo, México C.P. 42970

### **RESUMEN**

Abordar el tema de sólidos de revolución permite, entre otras cosas, aproximar volúmenes de distintos cuerpos. Este tema es parte de la asignatura de cálculo integral en el nivel medio y superior (ciencias e ingenierías). Su entendimiento favorece el desarrollo de competencias que permiten la conexión entre diferentes conceptos matemáticos. A pesar de su importancia, se tiene evidencia de que en ocasiones, su entendimiento es parcial o nulo durante el curso de la asignatura. Para atender parte de esta problemática, se propone la estrategia denominada “Reutilizando recipientes cotidianos”, que tiene como objetivo identificar los elementos de aprendizaje matemático que emergen, cuando se resuelven problemas relacionados con sólidos de revolución, reutilizando recipientes cotidianos. La metodología es que los estudiantes resuelvan situaciones problemáticas a partir del material de estudio propuesto. Las tareas de instrucción, siguieron utilizar sólidos de revolución y fueron aplicadas de forma piloto a un grupo mixto de 30 estudiantes, con conocimiento previo de cálculo diferencial. Los datos se recolectaron bajo autorización de los estudiantes, mediante toma de videos, fotografía, audio y evidencia escrita. Del trabajo realizado, se logró identificar los elementos de aprendizaje matemático que emergieron al utilizar los objetos de estudio propuestos. En este sentido, se argumenta que la propuesta sugerida robusteció el entendimiento del tema de sólidos de revolución. Ya que, permitió la manipulación de objetos concretos y se favoreció la generación de imágenes mentales sobre el significado de las expresiones matemáticas que emergieron.

### **INTRODUCCIÓN**

En el temario de la asignatura de cálculo integral de nivel medio superior y superior de la educación pública en México, está considerado el tema de sólidos de revolución (SEMS, 2013). Su importancia radica en que a través de su aplicación, es posible, entre otras cosas, aproximar el volumen de ciertos cuerpos irregulares comunes en el entorno; por ejemplo, pipas, botellas de agua, jugos etc. Además de que su aprendizaje favorece el desarrollo de competencias; por ejemplo, en los alumnos aporta elementos para que argumenten sobre las aplicaciones de elementos matemáticos específicos en contextos reales, proponiendo puntos de vista reflexivos y argumentados; en docentes permite que desarrollen estrategias de enseñanza mediante experiencias y proyectos en el contexto de los estudiantes (SEMS, 2013).

A pesar de la importancia de este tema, se tiene evidencia que en ocasiones su aprendizaje se logra de manera parcial o incluso no se alcanzan a abordar este concepto en el curso normal. Una posible explicación de lo anterior, es que los temarios son exhaustivos o los problemas planteados son estrictamente apegados a alguna bibliografía. Lo que permite, un desarrollo limitado de las competencias que se deberían alcanzar a medida que se implementaran otras tareas de instrucción, donde fuera posible interactuar con los objetos de estudio, siguiendo las ideas de la corriente Piagetiana, donde parte del aprendizaje se logra cuando el sujeto interactúa con el objeto. Como una posible alternativa para atender parte de este problema, en este trabajo se reporta la implementación de una estrategia denominada “Reutilizando”, la cual tiene como objetivo identificar los elementos de aprendizaje matemático que emergen, cuando se resuelven problemas utilizando material cotidiano; y da lugar a la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué elementos de aprendizaje matemáticos emergen al resolver problemas de sólidos de revolución, al utilizar material cotidiano? La metodología propuesta fue resolver situaciones problemáticas, en la cuales el material de estudio eran recipientes cotidianos, tales como, botellas, cajas de jugo, latas, etc.

## TEORÍA

Este apartado consiste en describir el sustento de la investigación. En este sentido, es preciso subrayar la postura que se tiene sobre matemáticas, ya que las tareas de instrucción están directamente influenciadas por la forma en que los autores identifican esta disciplina Godino, Batanero, y Font, (2003). De esta manera, se adopta la postura de Steen (1988), donde argumenta que las matemáticas son ampliamente aceptadas como la ciencia de los patrones. Con esta idea, la tarea de los matemáticos consiste en observar patrones de comportamiento y generar reglas que los describan (Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez, 2013). Por esta razón, en las tareas propuestas, se busca que los estudiantes identifiquen regularidades y las modelen matemáticamente, para su posterior manipulación con elementos matemáticos.

Por otra parte, se describe que en desarrollo de las tareas de instrucción y generación del material didáctico, se tomó como referente la resolución de problemas descrita por Polya, (2005); Schoenfeld (1992) y Santos-Trigo (2007), en la cual se proponen el desarrollo de heurísticas, es decir, identificación de saberes previos y su aplicación en las tareas solicitadas. En este sentido, este trabajo se basa en la corriente pedagógica constructivista, ya que, las tareas propuestas buscan desequilibrar los esquemas mentales de los estudiantes, provocando así la asimilación y acomodación de nuevos saberes, a través de la manipulación y estudio de los objetos físicos. Por su parte, para el entendimiento matemático, este trabajo se basó con lo propuesto por Hiebert, et al., (1997) donde se menciona que entender, es un proceso complejo que se da por niveles. Y para estas tareas, fue la forma en que se esperaba se diera; por ejemplo, en un momento los estudiantes fueron capaces de identificar el comportamiento de una función que modelara el contorno del objeto de estudio. Posteriormente, lograron aplicar métodos de integración y algunos utilizar el método de los discos para obtener el volumen. Así como, darle sentido a las expresiones que estaban proponiendo.

Referente a los trabajos revisados sobre la forma en que se ha abordado el tema de sólidos de revolución, se tiene evidencia que existen múltiples propuestas y en la mayoría se describe que existe dificultad para dar sentido a las expresiones algebraicas que emergen de tema. En este sentido Serhan, (2015) estudió cuál era el significado que le daban los estudiantes, a las integrales, cuando eran aplicadas a diversas áreas, incluidos sólidos de revolución. Su estudio lo aplicó con 25 estudiantes que cursaban la asignatura de cálculo integral. Propuso la solución de una integral que posteriormente sería aplicada a sólidos de revolución. Identificó, que a pesar de tener la parte algorítmica fluida, al momento de la aplicación mostraron dificultades, por lo que no lograron en su mayoría concluir con la tarea propuesta.

Por su parte Guillen, (2010) explica las razones del por qué se deberían utilizar materiales sólidos, como contexto de enseñanza. Una de las ideas centrales fue analizar cómo influía la manipulación de objetos concretos para que los estudiantes dieran sentido y generaran imágenes mentales de las expresiones algebraicas que emergían. Concluyeron que la manipulación de los objetos concretos, permite entre otras cosas, que los estudiantes tengan un nivel de entendimiento superior, comparado a cuando solo se realiza la parte algorítmica, y argumentan que podría deberse a que utilizan más de un sentido del cuerpo. Además, este tipo de tareas permiten la manipulación del objeto para obtener sus dimensiones, lo que puede generar el desarrollo del sentido numérico.

Por otra parte, menciona que las tareas propuestas con estas ideas de manipulación de objetos concretos, requieren mayor tiempo en diseño y aplicación, porque se deben considerar múltiples variables que pudieran emerger en el desarrollo de la tarea, tales como, el interés por el objeto, alguna futura aplicación, la complejidad, entre otros (Guillen, 2010). En este sentido, Rubí, Moreno, Pou, y Jordán, (2010) realizaron un estudio para identificar algunas de las problemáticas en torno a las dificultades presentadas al abordar temas de cálculo diferencial e integral. Identificaron problemas en docentes y alumnos, tales como falta de fluidez en la enseñanza de estos temas y parte de desinterés por parte de los estudiantes, además propusieron estrategias de estudio, una de ellas era el uso de material didáctico concreto. Mediante el cual presentaban situaciones problemáticas que serían abordadas con herramientas puramente matemáticas.

Por su parte Pettersson y Scheja (2008) realizaron un estudio con 20 estudiantes de ingeniería, referente a la conceptualización de límite e integral, en el cual fue incluido el tema de sólidos de revolución por el método de discos. En su estudio observaron que los estudiantes mostraron dificultades para relacionar el concepto de límite aplicado a los objetos de estudio, primero para obtener área y posteriormente el volumen. También reportan que la mayoría de los estudiantes abordaron el

problema con características de resolución de problemas, ya que simplificaron el problema en otros más simples, y se hicieron presentes heurísticas que fueron cruciales en la solución.

### PARTE EXPERIMENTAL

El enfoque del presente trabajo es cualitativo, debido a que las fuentes de información recolectadas para su análisis consisten en evidencias escritas o verbales de los participantes, mediante las cuales es posible identificar formas particulares de pensar o razonar, con relación a la aplicación de la integral en el tema de sólidos de revolución. En esta metodología se presta atención a la forma en que los estudiantes responden a las preguntas que guían a la tarea, es decir, se busca identificar, qué es lo que piensan, como abordan la tarea, cómo interpretan la información, de qué manera se adaptan en la resolución de la actividad, qué heurísticas utilizan y cómo relacionan sus recursos con el nuevo conocimiento que se genera al abordar la tarea. El diseño de la tarea incluyó, la contextualización, la manipulación del objeto de estudio, el problema, las condiciones de aplicación, así como los cuestionamientos guías para apoyar el avance de los estudiantes.

**Participantes.** Las tareas de instrucción se implementaron en una escuela pública de nivel superior, (Instituto Tecnológico de Atitalaquia, ITAt), en una zona rural del Estado de Hidalgo. Los participantes se eligieron por conveniencia. Las tareas se implementaron con un grupo mixto de estudiantes, con 30 integrantes en promedio, de una licenciatura en ingeniería industrial. Los alumnos habían aprobado los cursos de cálculo diferencial y estaban cursando cálculo integral. Para la actividad se formaron equipos de dos a cuatro integrantes. Se permitió el uso de calculadora, Geogebra, Excel o los recursos computacionales que los participantes consideraran necesarios para abordar las tareas.

**Características y tipo de tarea.** Se diseñó una tarea de instrucción, con la cual se buscó identificar los elementos útiles para fortalecer el entendimiento de las aplicaciones de la integral, específicamente en la obtención de volumen de recipientes cotidianos mediante la aplicación del tema “sólidos de revolución, (método de discos)”. Las características consideradas durante el diseño de las tareas son: la formulación de preguntas, conjeturas y relaciones, orientadas a promover el entendimiento y la construcción de modelos o sistemas conceptuales.

Referente a la estructura de la tarea, consistió en que los estudiantes trajeron un recipiente común, del cual se solicitó obtener de manera analítica el volumen, aplicando la metodología del tema sólidos de revolución, por el método de los discos. Primero se pidió que identificaran un eje de rotación, a partir del cual, fuese posible rotar la superficie o contorno que describiera al objeto de estudio. El contorno se obtuvo mediante la representación gráfica en un plano cartesiano, a través de la medición de pares ordenados, es decir, se midieron incrementos aproximados en el eje de rotación y se utilizó el eje horizontal para representarlo, en el vertical se colocaron los valores correspondientes al contorno del objeto.

Para identificar la superficie a rotar, se plasmó gráficamente el contorno en un plano cartesiano; debido a la simetría del objeto de estudio (en caso de tenerla), se utiliza sólo una parte de los puntos equidistantes que conforman el contorno. Posteriormente, se guió a los estudiantes para que registraran los pares ordenados en Excel o Geogebra, y a partir de ahí, que realizaran su ajuste con una función polinómica. A continuación se procedió a aplicar el método de discos para obtener de manera analítica el cálculo del volumen. Posteriormente se pidió realizar la comprobación de manera física, apoyados de una probeta graduada. Para este proceso, se llenaron los recipientes con agua, para después verterlo en la probeta, comparando su cálculo con la medida obtenida.

### RESULTADOS

Este apartado tiene el propósito de determinar de qué manera, tareas desarrolladas por estudiantes de licenciatura utilizando material concreto y cotidiano, favorecieron el desarrollo del entendimiento de la aplicación de las integrales (sólidos de revolución). Además de identificar los elementos que emergieron al abordar las tareas relacionadas con la obtención del volumen de diferentes recipientes. Para la aplicación los estudiantes integraron 9 equipos, entre 2 y 4 personas, quienes trajeron material concreto para la realización de la actividad, tales como botellas, vasos, embudos, entre otros. Para realizar el análisis de esta actividad, se identificaron líderes en cada equipo, a cada uno se le asignó un número del 1 al 9. El seguimiento de las actividades se realizó a través del líder,

debido a que fueron quienes mostraron interés en el desarrollo de las tareas e influyeron y organizaron la actividad del resto de los integrantes del equipo.

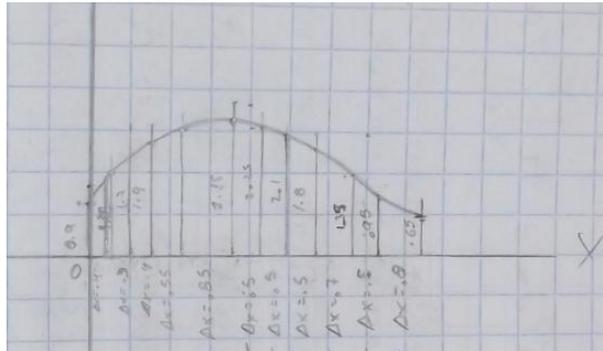
Para iniciar con la actividad, se dieron las indicaciones de aplicación propuestas en la parte experimental. De manera general, los alumnos mostraron interés sobre el tema, debido a que el material de estudio fue traído por ellos mismos. Los estudiantes partieron de la modelación del contorno y la identificación de pares ordenados en el plano cartesiano, a través de mediciones físicas del contorno del objeto de estudio. Cabe resaltar que algunos equipos (5, 6 y 7), pusieron su objeto sobre una hoja y de ahí marcaron el contorno, plasmándolo en un plano cartesiano.

El equipo 8 quien tenía un objeto en forma de extractor, tomo las medidas utilizando una regla graduada y un hilo que hacia trazo de perpendicularidad, esta acción se pudo estudiar a profundidad para tratar conceptos de la recta y sus propiedades, sin embargo en este momento no se abordó de esa manera, ya que el tiempo de aplicación era un papel relevante. El resto de los equipos realizaron mediciones con regla y vernier.



Figura 28 Mediciones y obtención de pares ordenados.

Para todos los equipos, eje horizontal representaba la línea de rotación y el vertical su correspondiente al contorno (figura 2). Utilizando los datos obtenidos del contorno, se registraron en Excel por todos los equipos, y fueron guiados por los aplicadores para que obtuvieran una representación gráfica y aproximaran un modelo formal, mediante un ajuste polinómico, esta acción se pudo realizar con Geogebra o por el método de mínimos cuadrados, sin embargo no era el foco de este trabajo, razón por la cual se trabajó con la hoja de cálculo.



simbolizaron mediante la notación  $dx$ . A su vez la mayoría de los equipos identificó que existía una relación entre el radio que se utiliza para obtener el área de una circunferencia (útil en el método de los discos) y la altura representada por la función obtenida de Excel, muestra de esto se describe en la siguiente conversación.

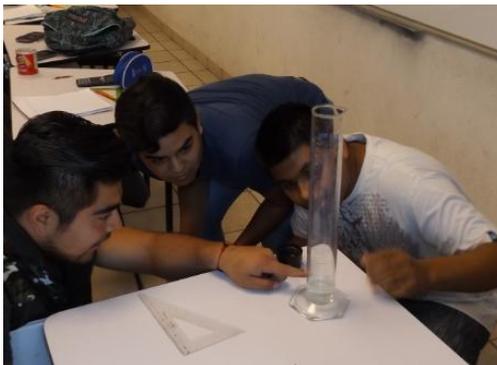
**Profesor:** ¿Qué relación tiene el radio con la función obtenida?

**Alumno:** a esa [señalando la función] nos indica la distancia que hay entre el eje  $x$  y el punto de la altura.

**Profesor:** ¿Y ese punto de dónde salió?

**Alumno:** salió de la medición que hicimos y tiene relación con la función, porque si se evalúa en lo que tenemos aquí [señalando el eje  $x$ ], nos da lo de acá, [señalando su correspondiente en el eje vertical].

Por último casi todos los equipos comprobaron sus resultados analíticos mediante el uso de una probeta graduada, ya que llenaron los recipientes con agua y los vertieron en la misma. Con esta acción casi todos los equipos validaron sus resultados; por ejemplo, los equipos 1, 2, 4, 5 y 9 lograron obtener volúmenes aproximados a la medición física. En cada momento se tuvo evidencia de que los estudiantes mostraron una visión retrospectiva, es decir, reflexionaban sobre los valores obtenidos, las consideraciones realizadas (espesor del objeto de estudio), ya que podrían influir en el valor puntual del volumen. Por su parte el equipo 8 de desintereso de la actividad, probablemente porque presentaron problemas para obtener la modelación del contorno. Los demás equipos 6 y 7 mostraron dificultades para validar sus volúmenes, ya que sus objetos estaban completamente cerrados y no pudieron introducirles agua.



**Figura 30** Validación del volumen.

## CONCLUSIONES

Con esta tarea, se logró obtener evidencia de los elementos matemáticos que emergieron cuando se resolvieron problemas enfocados a la búsqueda de funciones y cálculo de sólidos de revolución, mediante el uso de material reciclado. Se resalta también que la aplicación de la reforma educativa puede ser una oportunidad para generar estrategias de enseñanza que favorezcan al desarrollo de competencias docentes y para los alumnos.

De tal manera que con el desarrollo de este tipo de tareas, se evidenció de algunos elementos de aprendizaje matemático que emergieron; por ejemplo, la generación de imágenes mentales, desarrollo de los elementos del pensamiento matemático; tales como, identificación de elementos fijos y variables, formulación de conjeturas y comunicación de resultados. De esta manera, se cumple responde la pregunta de investigación planteada, ya que el resolver este tipo de tareas favoreció para entender el tema de sólidos de revolución y conectarlo con diferentes conceptos matemáticos.

En comparación con las propuestas estudiadas, se evidencia que coincidió en la generación de imágenes mentales. Se valida y justifica en relación con reportado en otros trabajos, porque se logró apreciar la ventaja que los estudiantes trabajen con objetos concretos; lo que les permite, dar sentido a los elementos que aparecen en las expresiones formales y momentos después, entender las cosas de manera abstracta. Trabajando así en un contexto, puramente matemático.

**BIBLIOGRAFÍA**

1. F. Barrera-Mora y A. Reyes-Rodríguez. "Elementos didácticos y resolución de problemas: formación docente en matemáticas". Pachuca: UAEH (2013). México.
2. R. Duval. "Geometry from a cognitive point of view". *New ICMI studies series*, 5, 1998, pp. 37-51.
3. J. Godino, C. Batanero y V. Font. "Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de Matemáticas para maestros". Granada: Universidad de Granada, 2003.
4. G. Guillén. "¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?" En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV Lleida*: SEIEM, 2010, pp. 21-68.
5. J. Hiebert, T. P. Carpenter, E. Fennema, K. C. Fuson, D. Wearne, H. Murray, A. Olivier y P. Human. "Making sense: teaching and learning mathematics with understanding". Portsmouth, NH: Heinemann, 1997.
6. Rubí, Moreno, Pou, y Jordán, "Problemática persistente en el aprendizaje de cálculo caso de la facultad de ciencias, UABC". *El cálculo y su enseñanza*, 2 Cinvestav-IPN, México, D.F. 2010.
7. M. Santos-Trigo. "La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos". México: Trillas, (2007).
8. A. Schoenfeld. "Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics". En D. Grouws (Eds.). *Handbook for research o mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.1992, pp. 334 – 370.
9. Serhan, D."Students' understanding of the definite integral concept". En *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, Vol. 1,1, 2015, pp. 84-88
10. A. L. Steen, "The Science of Patterns". *Science*, Vol. 240, 4852, 1988, pp. 611-616.
11. Subsecretaría de Educación Media Superior. "Programa de Estudios: Bachillerato Tecnológico. Acuerdo 653". México: Secretaría de Educación Pública [SEMS] 2013.
12. K. Pettersson y M. Scheja. "Algorithmic contexts and learning potentiality: a case study of students understanding of calculus". *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 39, 6, 2008, pp. 767-784