

## ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA ESTADÍSTICA DE LAS SEÑALES CAÓTICAS

Héctor Garcés Guzmán,  
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez  
[hgarces@uacj.mx](mailto:hgarces@uacj.mx)

Victor Manuel Hinostrroza Zubía,  
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez  
[vhinostr@uacj.mx](mailto:vhinostr@uacj.mx)

Priscila Betsabe Hernández Valadez,  
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez  
[al131466@alumnos.uacj.mx](mailto:al131466@alumnos.uacj.mx)

**RESUMEN:** *Se anticipa que para el año 2020 cada persona consumirá un promedio de 5 GB de datos al mes; ¿Cómo se puede garantizar el intercambio seguro de información? Debido a esto hay una gran demanda por explorar nuevas técnicas y herramientas en el desarrollo de telecomunicaciones confiables, entre ellas se encuentran las señales caóticas. En particular porque destacan por tener varias propiedades tales como: ergodicidad, amplio ancho de banda, comportamiento pseudo aleatorio, alta sensibilidad a las condiciones iniciales y atractores. El propósito de este artículo es dar a conocer los resultados de un proyecto de investigación, donde se estudió el comportamiento de dieciocho mapas caóticos, desde el punto de vista estadístico, variando un parámetro de control dentro del régimen caótico. Se realizaron cerca de doscientos experimentos de mil iteraciones y los resultados se analizaron por medio de histogramas, donde se encontraron al menos tres diferentes tipos de ellos.*

**PALABRAS CLAVE:** Caos, osciladores caóticos discretos unidimensionales, estadística

### 1 INTRODUCCIÓN

La sociedad actual se caracteriza por estar bien comunicada, con miles de millones de aparatos interconectados, tales como automóviles, medidores de servicios, televisores, dispositivos móviles, etc. Esta enorme conectividad tiene muchos beneficios, sin embargo aumenta su vulnerabilidad. Como garantizar que un sensor de temperatura de un vehículo no comparta su información con un dispositivo malicioso. Para ello los elementos terminales de una red deberán estar autenticados por ella, como resultado hay un gran interés por desarrollar nuevas técnicas y herramientas que incrementen la seguridad, las señales caóticas tienen características apropiadas para esta tarea.

Una señal determinista implica un conocimiento absoluto de su comportamiento, por lo tanto el

cálculo completamente exacto de sus valores futuros cuando se conoce el estado actual. En cambio bajo las mismas condiciones, una señal estocástica implica el desconocimiento total de su comportamiento y la imposibilidad de evaluar en forma exacta sus valores futuros. En el caso de las señales caóticas es posible determinar exactamente su estado futuro a corto plazo, pero es imposible hacer una predicción a largo plazo. Bajo estas circunstancias, el comportamiento caótico se sitúa como una estructura intermedia entre el orden (señal determinista) y el total desconocimiento (señal estocástica).

El caos está relacionado con el desorden, la confusión o con lo impredecible; sin embargo en la naturaleza se encuentran varios sistemas con una estructura dinámica compleja. Un ejemplo es el estado del tiempo, ya que tiene una complicada estructura formada por un conjunto de diversas variables, como son: temperatura, velocidad del viento, presión atmosférica, humedad, lluvia, nubosidad, etc. Su rareza es que si una de estas variables llegara a tener una alteración microscópica, esto conlleva a cambios a gran escala en su evolución en el tiempo, de ahí que el estado del tiempo solo sea predecible a corto plazo.

Las señales caóticas discretas unidimensionales se emplean en diversas aplicaciones como por ejemplo: generación de secuencias pseudo aleatorias PN, marcas de agua, sistemas de comunicación de espectro extendido SS, criptografía, comunicaciones digitales seguras, etc. [1, 2].

### 2 OSCILADORES CAÓTICOS

Algunos sistemas no lineales deterministas bajo ciertas condiciones pueden generar una señal que presenta un comportamiento estocástico, a pesar de que su naturaleza es esencialmente determinista. Se han observado estos sistemas en áreas de estudio tan dispares como: biología, física, química, matemáticas, economía, meteorología, geología, ingeniería, etc. De estos sistemas los más simples

son los osciladores caóticos discretos y unidimensionales que se definen como una función no lineal  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que mapea de escalares a escalares y puede ser escrita por la función iterativa

$$\phi_{(k+1)} = f(\phi_k) \quad (1)$$

En numerosos sistemas no lineales dinámicos discretos unidimensionales se ha observado un comportamiento caótico; en particular en la tabla 1 se muestra la definición matemática de los mapas u osciladores considerados para el análisis reportado en este documento [3, 4].

Mapa	Definición
<b>Chebyshev</b>	$\phi_{(k+1)} = \cos(B \arccos(\phi_k))$
<b>Congruente</b>	$\phi_{(k+1)} = \begin{cases} B\phi_k - C & \phi_k > A \\ B\phi_k &  \phi_k  \leq A \\ B\phi_k + C & \phi_k < -A \end{cases}$
<b>Coseno</b>	$\phi_{(k+1)} = A \cos(\phi_k + B)$
<b>Cuadrático</b>	$\phi_{(k+1)} = B - (A\phi_k^2)$
<b>Cúbico 1</b>	$\phi_{(k+1)} = C(3\phi_k - 4\phi_k^3)$
<b>Cúbico 2</b>	$\phi_{(k+1)} = (1 - C)\phi_k + C\phi_k^3$
<b>Cúbico 3</b>	$\phi_{(k+1)} = C(\phi_k - \phi_k^3)$
<b>Desplazamiento de Bernoulli</b>	$\phi_{(k+1)} = A\phi_k \text{ mod } 1$
<b>Exponencial</b>	$\phi_{(k+1)} = \phi_k \exp(B(A - \phi_k))$
<b>Hopping</b>	$\phi_{(k+1)} = \begin{cases} D(\phi_k - A) + C & \phi_k > A \\ B\phi_k &  \phi_k  \leq A \\ D(\phi_k + A) - C & \phi_k < -A \end{cases}$
<b>Logístico</b>	$\phi_{(k+1)} = B(A^2 - \phi_k^2) - A$
<b>Logístico bipolar</b>	$\phi_{(k+1)} = 1 - \mu\phi_k^2$
<b>Logístico modificado</b>	$\phi_{(k+1)} = \lambda\phi_k(1 - A\phi_k)$
<b>Sinusoidal 1</b>	$\phi_{(k+1)} = C \sin(\pi\phi_k)$
<b>Tienda de campaña</b>	$\phi_{(k+1)} = A - B \phi_k $
<b>Tienda de campaña bipolar</b>	$\phi_{(k+1)} = \frac{1 + C^2 - 2C\phi_k - 2 \phi_k - C }{1 - C^2}$
<b>Tienda de campaña sesgado</b>	$\phi_{(k+1)} = \frac{C + \phi_k(1 - 2C) -  \phi_k - C }{2C(1 - C)}$
<b>Tienda de campaña simétrico</b>	$\phi_{(k+1)} = \beta(1 -  \phi_k ) - 1$

Tabla 1. Osciladores caóticos

El comportamiento aparentemente impredecible de las señales caóticas mostradas en la tabla 1

puede ser visto de una manera diferente cuando son descritas por su mapa de retorno, éste se obtiene al graficar dos muestras sucesivas  $\phi_{k+1}$  generadas por (1). En los mapas de retorno ilustrados en las figuras 1–3 se observa el determinismo a corto plazo.

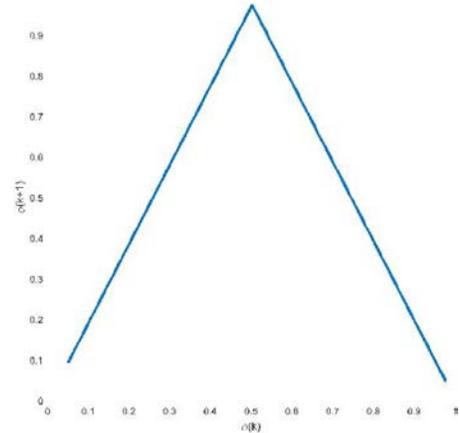


Figura 1. Mapa de retorno del oscilador tienda de campaña, para A=1.95

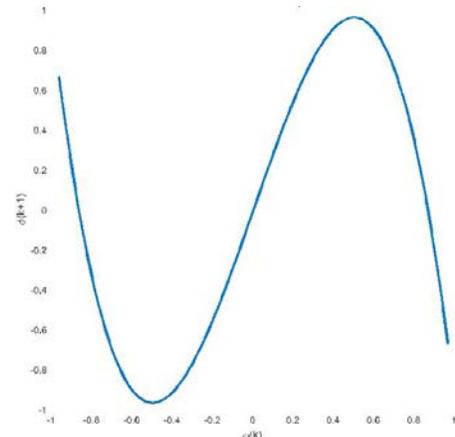


Figura 2. Mapa de retorno del oscilador cúbico 1, para C=0.964

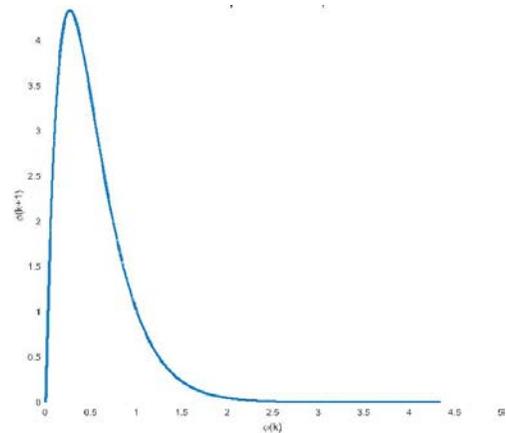


Figura 3. Mapa de retorno del oscilador exponencial, para A=1 y B=3.8

En la tabla 1 se pueden identificar siete mapas con funciones a tramos (definidas por más de una regla de correspondencia) y once que no lo son, catorce polinomiales de hasta tercer grado y cuatro definidos por funciones sinusoidales o exponenciales. Asimismo se observa la relación entre la definición matemática y el mapa de retorno, por ejemplo las expresiones matemáticas de los mapas tienda de campaña y cubico 1 son polinomiales de primer y tercer grado respectivamente, sus mapas de retorno están formados por líneas rectas para tienda y curvas para cubico 1. Si ahora se desea calcular el valor de la  $(n+k)$ -ésima muestra, siendo  $n > 0$ , la forma evidente de hacerlo es mediante la aplicación reiterada (veces) de (1) a partir de la  $n$ -ésima muestra:

$$\phi_{(n+k)} = f(f(\dots f(\phi_n))) \quad (2)$$

Esto significa que, dado un valor inicial  $\phi_0$  en teoría se puede conocer la secuencia caótica completa, por lo tanto no existe aleatoriedad. No obstante teniendo en cuenta la alta sensibilidad a las condiciones iniciales esto provoca que el comportamiento a largo plazo de las señales caóticas sea prácticamente impredecible. Debido a esto el estudio del comportamiento de las señales caóticas a largo plazo debe caracterizarse de manera estadística.

### 3.0 HERRAMIENTAS ESTADÍSTICAS EN EL ESTUDIO DE SEÑALES CAÓTICAS

A pesar de ser determinísticos, fenómenos naturales tan disímiles como estado del tiempo, comportamiento dinámico de una población o turbulencias en fluidos, tienen una conducta errática y compleja, no obstante han sido descritos mediante modelos estocásticos [5, 6]. La secuencia de valores en el tiempo discreto generada por (1) se puede estudiar tomando como base sus propiedades promediadas, en forma similar a un proceso estocástico empleando las herramientas de la teoría ergódica clásica, tales como: la función densidad de probabilidad, el operador Frobenius-Perron, los exponentes de Lyapunov, entre otras. Dada la relación cercana entre secuencias caóticas y procesos estocásticos, no es de sorprender que se puedan aplicar técnicas de análisis similares para ambos, particularmente los promedios en el tiempo de la señal caótica se puede relacionar con el promedio del ensamble de un proceso estocástico. En este contexto, se refieren a las propiedades estadísticas de una señal caótica a pesar que el método empleado para generarla (1) es determinístico. Es importante señalar que esta

aproximación se basa en la elección aleatoria de las condiciones iniciales. Es difícil obtener una función densidad de probabilidad invariante y en forma cerrada para la mayoría de los mapas caóticos, en particular de los dieciocho mapas estudiados en [5, 6] se reportó la evaluación de formas cerradas de solo tres de ellos: logístico, tienda de campaña y tienda de campaña sesgado. En el caso de logístico solo para  $n = 4$ , así que normalmente se recurre a su estimación empírica. Como consecuencia, en este trabajo se limitó al análisis a los histogramas producidos por mil iteraciones de (1), debido a estos describen la forma que una señal caótica visita las distintas regiones del espacio de fases. Se denomina espacio de fases de un sistema dinámico al conjunto de todos los posibles valores de las variables dependientes [6].

### 4 RESULTADOS EXPERIMENTALES

El estudio realizado y que se reporta en este documento, describe el comportamiento dinámico de la secuencia generada por (1). Se realizaron cerca de doscientos experimentos, empleando cada uno de los dieciocho mapas caóticos descritos en la tabla no 1, en cada experimento se generó mil iteraciones de (1). Se eligió al menos diez diferentes valores de un parámetro de control, siempre dentro del régimen caótico mostrado en la tabla no 2.

Mapa	Régimen caótico
Chebyshev	$A \in [3, 6]$
Congruente	$A = 0.25$ $B \in [1.91, 1.99]$ $C = 2A$
Coseno	$A \in [2.18, 2.27]$ $B = 47\pi/64$
Cuadrático	$B \in [1.55, 1.74]$
Cúbico 1	$C \in [0.952, 0.996]$
Cúbico 2	$C \in [-1.99, -1.88]$
Cúbico 3	$C \in [2.85, 2.94]$
Desplazamiento de Bernoulli	$A \in [2, 3.8]$
Exponencial	$A = 1$ $B \in [3.8, 5.8]$
Hopping	$A = \frac{C}{B}$ , $B \in [2.3, 3.1]$ $C = 0.5$ , $D = -2$
Logístico	$A \in [3.68, 3.93]$
Logístico bipolar	$\mu \in [1.6, 2.0]$
Logístico modificado	$\lambda \in [3.75, 3.92]$
Sinusoidal 1	$C \in [0.95, 0.9953]$
Tienda de campaña	$A \in [1.5, 1.95]$
Tienda de campaña bipolar	$C \in [0.1, 0.988]$
Tienda de campaña sesgado	$C \in [0.012, 0.9]$
Tienda de campaña simétrico	$\beta \in [1.5, 1.95]$

Tabla 2. Región caótica

En particular se determinó la frecuencia relativa con que la señal caótica visita una porción del espacio de estados, *i.e.* el régimen caótico mostrado en la tabla no 2, por medio de histogramas como los ilustrados en las figuras 4-6. En estas graficas el régimen caótico se dividió en diez segmentos. En todos los experimentos la condición inicial  $x_0$  fue generada en forma aleatoria, y se observó que cualquier valor de la condición inicial  $x_0$  da lugar a un histograma similar, como lo prevé la teoría ergódica.

Al disponer la información de esta manera lo primero que se encontró fue la clasificación de los dieciocho sistemas caóticos en dos grupos y una excepción. El primer grupo presenta histogramas con tendencia a la uniformidad, como el ilustrado en la figura 4. Una función uniforme implica que la señal caótica visita las distintas regiones del espacio de fases con igual frecuencia. Los mapas caóticos que tienen esta propiedad son: congruente, desplazamiento de Bernoulli, Hopping, tienda de campaña, tienda de campaña bipolar, tienda de campaña sesgado y tienda de campaña simétrico.

En cambio en el segundo grupo los histogramas mostraron una propensión hacia la forma de una parábola invertida, como se muestra en la figura 5. En este caso la señal caótica tiene una mayor preferencia por los valores extremos del espacio de fases. Los mapas caóticos del segundo grupo son: Chebyshev, coseno, cuadrático, cubico 1, cubico 2, cubico 3, logístico, logístico bipolar, logístico modificado y sinusoidal 1.

Sin embargo, en esta clasificación es importante mencionar la presencia de una excepción, el sistema caótico exponencial con un histograma también exponencial con un muy rápido decaimiento, como el exhibido en la figura 6. Hay que destacar la similitud del histograma con el mapa de retorno debido a que ésta señal caótica tiene preferencia por los valores cercanos a cero del espacio de fases.

Además esta clasificación es respaldada por las expresiones matemáticas de los sistemas caóticos, descritas en la tabla 1. Aquellos sistemas cuya ecuación contiene únicamente polinomios de primer orden son los pertenecientes al primer grupo, presentando mapas de retorno conformados por líneas rectas e histogramas con tendencia a lo uniforme.

Mientras que los sistemas cuya ecuación está conformada por polinomios de orden mayor a uno o que contienen funciones sinusoidales son los incluidos en el segundo grupo, donde en los mapas de retorno predominan las líneas curvas en su mayoría parábolas y formas sinusoidales y los histogramas tienden hacia la parábola invertida. A pesar de que el sistema caótico exponencial posee las características del segundo grupo, su mapa de retorno presenta la forma gamma y no la sinusoidal o parabólica.

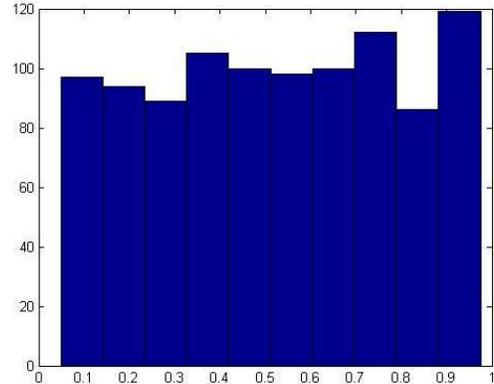


Figura 4. Histograma del oscilador tienda de campaña, para  $A=1.95$ .

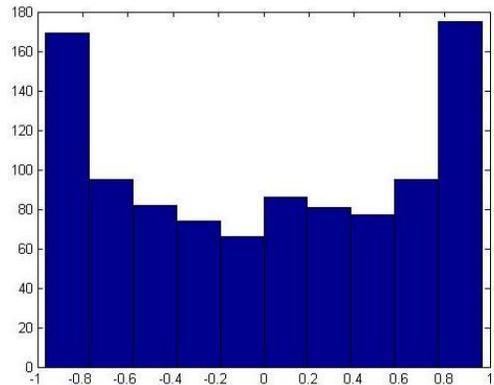


Figura 5. Histograma del oscilador cubico 1, para  $C=0.964$

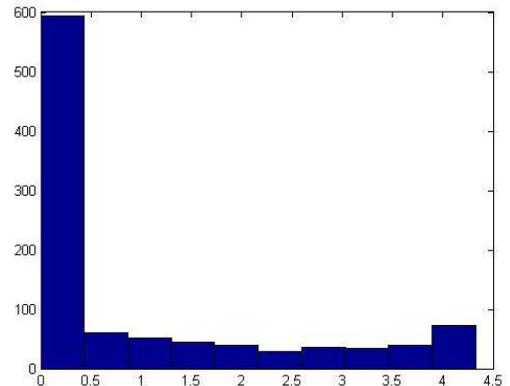


Figura 6. Histograma del oscilador exponencial, para  $A=1$  y  $B=3.8$ .

## 5 CONCLUSIONES

En esta investigación se realizó un estudio del comportamiento estadístico para dieciocho osciladores caóticos discretos unidimensionales. Este trabajo consistió en continuar con los estudios realizados previamente a esos mapas caóticos [7, 11], de esta manera se profundizó en el conocimiento de las señales caóticas. Además se procedió a realizar un análisis de la estabilidad del comportamiento de cada uno de los osciladores caóticos estudiados, al variar un parámetro de control dentro de la región caótica, en este caso en todos los experimentos los histogramas presentaron las mismas características aquí reportadas.

También se comprobó la ergodicidad al variar aleatoriamente la condición inicial. Como resultado los mapas se clasificaron en tres categorías de acuerdo a su histograma, estas son: uniforme, parábola invertida y exponencial con rápido decaimiento. Con la información estadística que se obtuvo se puede observar que el comportamiento estadístico de los osciladores caóticos discretos unidimensionales estudiados está relacionado con su definición matemática.

## 6 REFERENCIAS

- [1] D. C. Laney, G. M. Maggio, F. Lehman, y L. Larson, *Multiple Access for UWB Impulse Radio with Pseudochaotic Time Hopping*, *IEEE Journal on Selected Areas in Communication*, Vol. 20, Núm. 9, 1692-1700, Dec. 2002.
- [2] G. M. Maggio, N. Rulkov, y L. Reggiani, *Pseudo-Chaotic Time Hopping for UWB Impulse Radio*, *IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, Vol. 48, Num 12, 1424-1435, Dec. 2001
- [3] Garcés<sup>1</sup> Guzmán Héctor, Hinostrza Zubía Víctor Manuel, Peña Alarcón Deana Larisa, Enríquez Edwin Antonio, *Modificaciones en la rapidez de sincronización por sistemas acoplados de señales caóticas unidimensionales*, *Congreso Internacional de Investigación Tijuana, Revista Aristas: Investigación Básica y Aplicada, Tijuana, BC.*, Vol. 5, Núm. 9, pp. 38 - 42, Febrero 2016.
- [4] Enríquez Edwin Antonio, Peña Alarcón Deana Larisa, *“Estudio estadístico de la sincronización de osciladores caóticos”*, *Tesis profesional, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Mayo 2015.*
- [5] Isabelle Steven. H., *“A Signal Processing Framework for the Analysis and Application of*

*Chaotic Systems”*, Ph.D. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology (MIT), Cambridge, MA, May 1995.

- [6] Luengo Garcia David, *“Estimación óptima de secuencias caóticas con aplicación en comunicaciones”*, *Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria, Santander, España, Septiembre 2006.*
- [7] Figueroa Martell Nohemí Araceli, *“Estudio de la sincronización de señales caóticas discretas unidimensionales”*, *Tesis profesional, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Mayo 2013.*
- [8] Ochoa Carrillo Rosa Isela, Garcés Guzmán Héctor, Hinostrza Zubía Víctor, Mendoza Carreón Alejandra, *“Sincronización de señales caóticas unidimensionales por el método de sistemas acoplados”*, *Proceedings ICSS, 31th International Congress of Electronic Engineering, Chihuahua, Chih.*, Vol. XXXI, pp. 168 - 171, Octubre 2009.
- [9] Garcés Guzmán Héctor, Ochoa Carrillo Rosa Isela, *“Estudio de la sincronización de osciladores caóticos por el método de sistemas acoplados”*, *Proceedings ICSS, 34th International Congress of Electronic Engineering, Chihuahua, Chih.*, Vol. XXXIV, pp. 23 - 27, Octubre 2012.
- [10] Garcés H., *“Wideband Chaotic Signal Analysis and Processing”*, Ph.D. Dissertation, The University of Texas at El Paso, 2007.

Héctor Garcés Guzmán: Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica por el Instituto Politécnico Nacional en 1981. Maestro en Ciencias en ingeniería eléctrica por The University of Texas at El Paso en 2002. Doctorado (PhD) en ingeniería computacional por The University of Texas at El Paso en 2007. Perito en telecomunicaciones con autorización IFT vigente No. 401. Experiencia académica de más de treinta años y profesional de veinte años en la industria de las telecomunicaciones.

Víctor Manuel Hinostrza Zubía: Ingeniero Industrial en Electrónica por el Instituto Tecnológico de Chihuahua en 1980. Doctorado (PhD) en telecomunicaciones por el Instituto de Ciencia y Tecnología de la Universidad de Manchester (UMIST) en 2002. Experiencia profesional de 10 años en la industria. Experiencia docente de 26 años, maestro en la UACJ desde enero de 1989.

Priscila Betsabe Hernández Valadez: Estudiante de la carrera Ingeniera en Sistemas Digitales y Comunicaciones por la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.