

Título del Proyecto de Investigación
al que corresponde el Reporte Técnico:

Construcción de álgebras 4D y soluciones de EDPs

Tipo de financiamiento

Sin financiamiento

Fecha de Inicio: 19/07/2021

Fecha de Término: (17/12/2023) Extensión.

Tipo de Reporte

Parcial

Final

Autor (es) del reporte técnico:

Elifalet López González
Edgar Alonso Martínez García
Rafael Torres Córdoba
Víctor Manuel Carrillo Saucedo
Javier Servando Castro Carmona
Luis Fernando Jiménez Tinoco

TÍTULO DEL REPORTE TÉCNICO

Resumen del reporte técnico en español (máximo 250 palabras):

En el proyecto se propone la construcción de álgebras 4D asociativas conmutativas con unidad, su uso para resolver ecuaciones diferenciales parciales (EDPs), y dar seguimiento a la publicación de artículos de proyectos anteriores.

En el desarrollo de este proyecto se han publicado los artículos de investigación: "On solving EDPs by using algebras", "A characterization of algebrizability of vector fields", y "Pre-twisted calculus and differential equations". Se impartió un mini-curso en la "Semana nacional de investigación y docencia en matemáticas de la UNISON" en 2022. Se han dado tres ponencias en la UNISON, dos en CIMAT, una en la UANL, y una en el CBTIS 117 de Ciudad Cuauhtémoc Chihuahua. Se participó en entrevista de programa de radio UACJ y se cuanta con videos de You Tube. Se asesoró a dos estudiantes en el Verano de Investigación Científica 2022 del programa Delfín.

Resumen del reporte técnico en inglés (máximo 250 palabras):

The project proposes the construction of 4D associative commutative algebras with unity, their use to solve partial differential equations (EDPs), and follow up on the publication of articles from previous projects that are related to this one.

In the development of this project, the research articles have been published: "On solving EDPs by using algebras", "A characterization of algebrizability of vector fields", and "Pre-twisted calculus and differential equations". A mini-course was given in the "Semana nacional de investigación y docencia en matemáticas de la UNISON" en 2022. Three presentations have been given at UNISON, two at CIMAT, one at UANL, and one at CBTIS 117 in Ciudad Cuauhtémoc Chihuahua. Participation in an interview on the UACJ radio program and has YouTube videos. He advised two students in the 2022 Scientific Research Summer of the Delfín program.

Palabras clave: Álgebras asociativas conmutativas con unidad, Ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas, derivada de Lorch, Campos vectoriales, ecuaciones diferenciales.

Usuarios potenciales (del proyecto de investigación):

Los usuarios potenciales de los resultados de este proyecto son ingenieros, matemáticos, físicos y áreas afines que usen las ecuaciones diferenciales en modelación de fenómenos. Se cuenta con resultados para resolver el problema de Cauchy para ecuaciones diferenciales parciales del tipo $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0$ mediante el uso de álgebras. Entre estas ecuaciones se encuentra la ecuación de Laplace 2D y la ecuación de onda 1D que modelas situaciones de la física clásica. También se tienen aplicaciones en teoría de elasticidad (ver referencias de [14]).

Reconocimientos

Se agradece la participación de los doctores Martín Eduardo Frías Armenta de la UNISON y Julio Ávila del ITESM campus Sonora Norte, en la investigación de temas relacionados con este proyecto.

1. Introducción

Se usará ODE, ODEs para ecuaciones diferenciales ordinarias y EDP, EDPs para ecuaciones diferenciales parciales.

El grupo de trabajo que participa en este proyecto cuenta con avances de estudio álgebras, diferenciabilidad sobre álgebras, y los usos de estos temas en la solución de ecuaciones diferenciales tanto ordinarias como parciales; los trabajos publicados son [1], [2], [3], [8], [11], [12], [14], y en desarrollo son [4], [6], [7] y [13]. También se pueden consultar trabajos como [5], [9], [10], [15], ..., [23].

Un resultado clásico es que las funciones armónicas 2D corresponden con las funciones conjugadas de funciones analíticas complejas. Este resultado es muy elegante ya que da la solución completa de la ecuación de Laplace 2D. El trabajo [14] generaliza este resultado mediante el uso de la diferenciabilidad pretorcida y sus correspondientes ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas. Además, los resultados presentados en este trabajo

se pueden usar para resolver problemas de Cauchy para ecuaciones diferenciales parciales, como se hace en [12], en el cual se introduce la diferenciabilidad pretorcida. Además, en [12] se muestra que la diferenciabilidad pre-torcida se puede usar para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas y no-autónomas, lo cual se considera tema para futuras investigaciones.

Los resultados del artículo [22] dan solución completa a familias sistemas de ecuaciones de Cauchy-Riemann asociadas a la diferenciabilidad de Lorch, los cuales son sistemas de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. Este trabajo se completa en el manuscrito [3] el cual es un resultado de este proyecto. Así, en [3] se resuelven sistemas de n ecuaciones diferenciales parciales con n variables dependientes y n variable independientes, los cuales son sistemas asociadas a la A-diferenciabilidad. En particular, para $n=4$ se tiene que las funciones A-diferenciables son soluciones de los sistemas de ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas asociadas a la A-diferenciabilidad. Los resultados de [12] generalizan de manera muy sorprendente a las familias de ecuaciones diferenciales parciales que se pueden resolver de esta manera. Esto se usan de manera muy importante para la algebrizabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, ver [6] y [7], puesto que los primeros sistemas de ecuaciones diferenciales parciales que se pueden resolver de manera completa son los sistemas de ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas asociadas a la diferenciabilidad pretorcida.

Una caracterización de las álgebras asociativas, conmutativas con unidad (que llamamos simplemente álgebras) se da en [3], ya que en este trabajo se caracterizan las álgebras de matrices que son la imagen de álgebras bajo sus correspondientes primeras representaciones fundamentales.

En la última etapa del proyecto se ha logrado dar la familia de todas las álgebras 4D que son la imagen bajo la primera representación fundamental de álgebras con unidad el primer vector canónico e_1 . Esto y el artículo [3] nos dan una caracterización de las álgebras 4D. Además, se trabaja en usar estas álgebras para resolver sistemas planares de ecuaciones diferenciales cuadráticas. También se buscará usar estas álgebras para resolver ecuaciones diferenciales parciales. Los logros en cuanto a soluciones de

ecuaciones diferenciales de la física-matemática se encuentran contenidos en [12] y [14]. El tema de solución de sistemas de 4 EDPs de la física-matemática no se alcanzó a trabajar.

Se participó con ponencias en seminarios y foros nacionales y se participó en entrevista de radio UACJ. Se asesoró a dos estudiantes del programa Delfín en 2022, se impartió un mini-curso en la UNISON, y se participó con una ponencia en el CBTIS 117 de Cuauhtémoc Chihuahua.

2. Planteamiento

2.1 Justificación

Las ecuaciones diferenciales parciales modelan una cantidad importante de fenómenos en ingeniería y de manera generalizada en ciencia. Por ejemplo, en física, por lo que interesa conocer soluciones exactas de EDPs. En matemáticas existen diferentes técnicas o métodos para encontrar soluciones tanto exactas como numéricas, las cuales se usan de manera importante en algunas áreas de ingeniería. En la UACJ hay investigadores que usan la modelación en términos de EDPs de fenómenos de ingeniería y usan métodos numéricos, como por ejemplo elemento finito, para aproximar las soluciones.

En el proyecto “Soluciones exactas de EDPs lineales de segundo orden mediante álgebras” se desarrolló un método para construir soluciones de EDPs de dos variables independientes hasta de orden cuatro y también se aplicó para construir soluciones de EDPs de tres variables independientes. Este método aparece en [9] pero en este se usa la diferenciabilidad de Lorch y no se proponen familias de álgebras que simplifiquen al método. Hay artículos científicos recientes publicados en revistas internacionales con resultados parecidos, ver [17], [18] y referencias, pero no se usa la diferenciabilidad pre-torcida ni las álgebras que se han usado en estos proyectos desarrollados en la UACJ.

Mediante el uso de ecuaciones diferenciales sobre álgebras se pueden resolver sistemas de EDOs y sistemas de EDPs. Una familia importante de sistema de ecuaciones diferenciales se puede escribir, por ejemplo, como una sola ecuación diferencial de una variable sobre un álgebra cuyas

soluciones definen las soluciones del sistema, ver [1], [2], [4], [8], [11], [12], [14].

Se considera que los resultados de este proyecto tienen un potencial de impactar en la ciencia e ingeniería, pues las soluciones que se han construido y construirán son de EDPs de la física-matemática como la ecuación del calor, de onda, de bi-onda, bi-armónica, bi-telegráfica entre muchas otras. Para EDOs también se pueden construir soluciones mediante el uso de álgebras como se puede ver en [12].

2.2 Antecedentes

3. Objetivos (general y específicos)

General: el objetivo inicial del proyecto fue la construcción de una familia de álgebras asociativas conmutativas con unidad de dimensión real cuatro, de aproximadamente 18 parámetros reales, y su uso para construir familias de soluciones de EDPs de la física matemática de cuatro variables independientes.

Específicos: Los objetivos específicos que se plantearon en el proyecto son construir:

- a) una familia de álgebras asociativas conmutativas con unidad de dimensión real cuatro, de aproximadamente 18 parámetros reales.
- b) soluciones de EDPs de cuatro variables independientes.

4. Metas

- a) La escritura de por lo menos un artículo de investigación que contenga una familia de álgebras de dimensión real cuatro y su uso para resolver EDPs de cuatro variables independientes.
- b) La escritura de algún capítulo de libro en el que se den ejemplos de solución de EDPs de cuatro variables independientes mediante resultados de este proyecto.
- c) El seguimiento a la publicación de artículos de investigación desarrollados en proyectos anteriores.

5. Plan de trabajo

- 1) Se propuso trabajo sobre álgebras de matrices que se tengan que realizar mediante el uso de software matemáticos.

- 2) Construir una familia de álgebras asociativas conmutativas con unidad de dimensión real cuatro.
- 3) Escribir los resultados sobre la familia de álgebras de matrices que se busca construir.
- 4) Dar método para construir soluciones de EDPs de cuatro variables independientes, dando las diferentes versiones para diferentes familias de EDPs, que puede variar por los órdenes de las EDPs, los cuales pueden ser 2, 3 y 4.
- 5) Se desarrollarán ejemplos del uso del método para resolver EDPs de cuatro variables independientes y se escribirán los resultados.

6. Instituciones, organismos o empresas de los sectores social, público o productivo participantes (Si aplica)

En este proyecto participaron los doctores Martín Eduardo Frías Armenta de la UNISON y Julio Ávila del ITESM campus Sonora Norte.

7. Productos generados

- 1) **Publicación.** Se han publicado los siguientes tres artículos de investigación: "On solving EDPs by using algebras" en 2022 en la revista *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, "A characterization of algebrizability of vector fields", en colaboración con los doctores Julio Ávila (ITESM Sonora Norte), y Martín Eduardo Frías Armenta (UNISON), en 2023 en la revista *Forum Mathematicum*,

- y “Pre-twisted calculus and differential equations”, en 2023 en la revista Chaos, Solitons & Fractals en colaboración con los doctores de la UACJ Edgar Alonso Martínez García y Rafael Tórres Córdoba.
- 2) **Manuscrito:** Solución de la ecuación de onda unidimensional mediante álgebras.
 - 3) **Mini-curso:** “Semana nacional de investigación y docencia en matemáticas” de la UNISON en 2022.
 - 4) **Ponencias.** Se ha participado con siete ponencias: tres ponencias en la UNISON (Sonora), una virtual en CIMAT (Guanajuato), una virtual en la UANL (Nuevo León), una presencial en CIMAT en 2023, y una ponencia en el CBTis 117 de Cuauhtémoc.
 - 5) **Vídeos de You-Tube:** uno de entrevista en radio-UACJ [24], otro de una ponencia para evento de la UNISON, y ponencia en CIMAT en 2023 [25].
 - 6) **Verano de Investigación Científica del programa Delfín:** se asesoró a dos estudiantes de la Universidad Veracruzana en el verano de 2022.

8. Mecanismos de transferencia. (No aplica)

9. Contribución e impacto del proyecto.

El desarrollo de este proyecto contribuye al avance en el estudio de las ecuaciones diferenciales tanto ordinarias (EDOs) como parciales (EDPs) mediante la generación de métodos que contribuyan a la solución de estas ecuaciones. Se mostró que mediante el uso de álgebras se pueden resolver ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. También contribuye a la investigación de álgebras asociativas conmutativas con unidad, a las que en este proyecto se consideran como sistemas de números que son extensiones de los sistemas de números reales y números complejos. Se generalizan resultados conocidos en matemáticas y física. Por ejemplo, el resultado que relaciona a las funciones armónicas 2D con las funciones conjugadas de funciones analíticas complejas. Se encuentra solución a problemas de Cauchy de EDPs mediante el uso de álgebras. Se presentaron los avances principales de este proyecto en el evento “70+2” en honor a Xavier Gómez-Mont, ponencia en YouTube [25].

10. Impacto económico, social y/o ambiental en la región

La referencia de que en la región se desarrollan este tipo de proyectos sirve para posibles colaboraciones, se van dando a conocer los resultados para crear la posibilidad de futuras aplicaciones de estos métodos.

11. Referencias (bibliografía)

[1] M. A. Alcorta, M. E. Frías Armenta, M. E. Grimaldo-Reyna, E. López-González, Algebrization of Nonautonomous Differential Equations, *J. Appl. Math.* Volume 2015, Article ID 632150, 10 pages (2015).

[2] A. Alvarez-Parrilla, M. E. Frías-Armenta, E. López-González, C. Yee-Romero, On Solving Systems of Autonomous Ordinary Differential Equations by Reduction to a Variable of an Algebra, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* Volume 2012, Article ID 753916, 21 pages (2012).

[3] J. C. Ávila, M. E. Frías-Armenta, E. López-González, Generalized Cauchy-Riemann equations in non-identity basis with application to the algebrizability of vector fields. *Forum Mathematicum* 2023.

[4] J. Ávila, M. E. Frías-Armenta, E. López-González, Geodesibility of algebrizable three-dimensional vector fields, preprint arXiv: 1912.00105.

[5] J. S. Cook, Introduction to A-Calculus, preprint arXiv: 1708.04135v1, (2017).

[6] J. S. Cook, E. López-González, Algebrizability of systems of PDEs. In preparation (2022).

[7] J. S. Cook, E. López-González, Matrix algebrizability of systems of PDEs. In preparation (2022).

[8] M. E. Frías-Armenta, E. López-González, On geodesibility of algebrizable planar vector fields, *Bol. Soc. Mat. Mex.* (2019) 25:163-186.

[9] P. W. Ketchum, Analytic Functions of Hypercomplex Variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 30, (1928), pp. 641-667.

- [10] P. W. Ketchum, A complete solution of Laplace's equation by an infinite hypervariable, Amer. Jour. Math., vol. 51, (1929), pp. 179-188.
- [11] E. López-González, Differential equations over algebras, Advances and Applications in Mathematical Sciences, Vol. 8, Issue 2, pages 113-214, 2012.
- [12] E. López-González, E. A. Martínez García, R. Torres Córdoba, Pre-twisted calculus and differential equations. Chaos, Solitons and Fractals 2023.
- [13] E. López-González, φ -harmonic algebras. In preparation 2022.
- 14) E. López-González, On solutions of PDEs by using algebras, Math. Methods Appl. Sci., Vol. 45, Issue 8, pages 4834-4852 2022. <https://doi.org/10.1002/mma.8073>.
- 15) E. Lorch, The Theory of Analytic Functions in Normed Abelian Vector Rings, Trans. Amer. Math. Soc., 54 (1943) pp. 414 - 425.
- 16) R. Pierce, Associative Algebras, Springer-Verlag, New York, Heidelberg Berlin (1982).
- 17) Plaksa, S.A. Monogenic Functions in Commutative Algebras Associated with Classical Equations of Mathematical Physics. J. Math. Sci. 242, pp. 543-575 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04488-3>.
- 18) A. Pogorui, R. M. Rodríguez-Dagnino, M. Shapiro, Solutions for PDEs with constant coefficients and derivability of functions ranged in commutative algebras, Math. Methods Appl. Sci. 37(17), 2799-2810 (2014).
- 19) G. Sheffers, Verallgemeinerung der grundlagen der gewöhnlichen komplexen funktionen, Leipziger Berichte vol. 45 (1893) pp. 838-848; vol. 46 (1894) pp. 120-134.
- 20) R. D. Wagner, The generalized Laplace equations in a function theory for commutative algebras, Duke Math. J. Volume 15, Number 2 (1948), 455-461.

21) J. A. Ward, A theory of analytic functions in linear associative algebras, Duke Math. J. vol. 7, (1940), pp. 233-248.

22) J. A. Ward. From generalized Cauchy-Riemann equations to linear algebra, Proc. Amer. Math. Soc. 4(3) (1953), pp. 456-461.

23) <https://math.stackexchange.com/questions/2855764/partial-differential-equation-with-two-dependent-variables>.

24) <https://www.youtube.com/watch?v=AiVj9SSc7B0&t=8s>

25) <https://www.youtube.com/watch?v=KGbrh3Ro6yo>

12. Anexos

12.1 Taxonomía de los Roles de Colaborador (con las actividades logradas)

Roles	Definición de los roles	Nombre de él(la) investigador(a)	Figura	Grado de contribución	Actividades logradas durante el proyecto	Tiempo promedio semanal (en horas) dedicado al proyecto
Autor	Autor de artículo (en matemáticas todos los participantes de un artículo se consideran autores por igual)	Edgar Alonso Martínez García	Colaborador	20% del manuscrito	Manuscrito: Pre-twisted calculus and differential equations	3
Autor	Autor de artículo (en matemáticas todos los participantes de un artículo se consideran autores por igual)	Rafael Torres Córdoba	Colaborador	20% del manuscrito	Manuscrito: Pre-twisted calculus and differential equations	3
Autor	Autor de artículo (en matemáticas todos los participantes de un artículo se consideran autores por igual)	Martín Eduardo Frías Armenta (UNISON)	Colaborador	33.3% del manuscrito	Manuscrito: A characterization of algebrizability of vector fields	4
Autor	Autor de artículo (en matemáticas todos los participantes de un artículo se consideran autores por igual)	Julio Ávila (ITESM Sonora Norte)	Colaborador	33.3% del manuscrito	Manuscrito: A characterization of algebrizability of vector fields	4
Autor	Autor de manuscrito (en matemáticas todos los participantes de un artículo se consideran autores por igual)	Víctor Manuel Carrillo Saucedo	Colaborador	25% del manuscrito	Manuscrito: Solución de ecuación de onda	3

					unidimensional mediante álgebras	
Autor	Autor de manuscrito (en matemáticas todos los participantes de un artículo se consideran autores por igual)	Javier Servando Castro Carmona	Colaborador	25% del manuscrito	Manuscrito: Solución de ecuación de onda unidimensional mediante álgebras, Ponencia en CBTIS 117	3
autor	Autor de manuscrito (en matemáticas todos los participantes de un artículo se consideran autores por igual)	Luis Fernando Jiménez Tinoco	Colaborador	25% del manuscrito	Manuscrito: Solución de ecuación de onda unidimensional mediante álgebras, Ponencia en CBTIS 117	3

12.1.1 Estudiantes participantes en el proyecto

Nombre de estudiante(s)	Matrícula	Tiempo promedio semanal (en horas) dedicado al proyecto	Actividades logradas en la ejecución del proyecto
Mendoza Herrera Sofía	Universidad Veracruzana	40 hrs por 5 semanas	Verano de Investigación Científica del programa Delfín
Méndez Guerrero Héctor	Universidad Veracruzana	40 hrs por 5 semanas	Verano de Investigación Científica del programa Delfín