Solución de ecuación de onda unidimensional mediante algebras

Víctor Manuel Carrillo Saucedo, Javier Servando Castro Carmona, Luis Fernando Jiménez Tinoco,

Elifalet López González

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Av. Plutarco Elías Calles 1210 Fovissste Chamizal, C.P. 32310, Ciudad Juárez, Chih., Méx.
elgonzal@uacj.mx, edmartin@uacj.mx, ratorres@uacj.mx

January 13, 2023

Resumen. Se considera al problema de Cauchy definido por la ecuación del onda $u_{tt} = u_{xx}$ con las condiciones $u(x, 0) = \cos(x)$, y $u_t(x, 0) = \operatorname{sen}(x)$. Aunque la solución se puede encontrar mediante la fórmula de d'Alembert de manera inmediata, se aborda el problema mediante el uso de álgebras para ilustrar un método que se puede usar para una familia de EDPs de segundo orden.

Keyword: `Ecuaciones diferenciales parciales`, `Diferenciabilidad de Lorch`, `Ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas`, `Soluciones exactas de EDPs.`

MSC[2010]: 30G35, 35C05, 58C20, 35N99, 35N05.

Introducción

La ecuación de onda describe la propogación de ondas de sonido, luz, agua, cuerdas, entre otras. El problema de la cuerda vibrante fue estudiada en el siglo XVIII por d'Alembert, Euler, Bernoulli y Lagrange. Se dice que las diferentes soluciones que se fueron encontrando generaron discusiones por más de veinticinco años.

La ecuación de onda unidimensional es una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden de dos variables independientes x, t y una variable dependiente $u = u(x, t)$. Esta tiene la forma

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \tag{1}$$

en donde c es la velocidad de la onda. El problema de Cauchy definido por la ecuación de onda (1) es encontrar $u(x, t)$ que cumpla las condiciones

$$u(x, 0) = f(x), \qquad u_t(x, 0) = g(x). \tag{2}$$

Este problema se puede resolver mediante la fórmula de d'Alembert

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-c}^{x+c} g(s) ds. \tag{3}$$

Mediante el uso de álgebras se han construido soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, ver [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [13], [14], [15], and [16]. En estos se usa la diferenciabilidad de Lorch, ver [11], y una variante a la que llamamos Differenciabilidad Pre-torcida, la cual se introduce en [10], en donde se resuelven problemas de Cauchy

$$Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} = 0, \qquad u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \qquad u_t(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \tag{4}$$

mediante el uso de álgebras. En este trabajo nos interesa usar este método basado en álgebras y aplicarlo al problema de Cauchy definido por la ecuación de onda y condiciones siguientes

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(x,0) = \cos(x), \qquad u_t(x,0) = \operatorname{sen}(x). \tag{5}$$

Aunque este problema se puede resolver mediante la fórmula de d'Alembert (3), en este trabajo se usa el método basado en álgebras para ilustrar el método.

En la Sección 1 se introducen álgebras y diferenciabilidad sobre álgebras. En la Sección 2 se introducen resultados de [10] en los que se encuentran las soluciones de los problemas de Cauchy (4). En la Sección 3 se encuentra la función $w(x,t)$, definida con respecto a un álgebra $\mathbb{A}$, cuya segunda componente es la solución del problema de Cauchy 5. En la Sección 4 se encuentra la solución del problema de Cauchy (5).

1 Diferenciabilidad Pretorcida

1.1 Álgebras $\mathbb{A}_1(p_1, p_2)$

A un espacio lineal $\mathbb{R}^2$ lo llamamos *álgebra* y lo denotamos por $\mathbb{A}$ si este está equipado con un producto bilineal $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denotado por $(u,v) \mapsto uv$, el cual es asociativo conmutativo y tiene identidad para el producto $e \in \mathbb{R}^2$ que satisface $eu = u$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$. Un elemento $u \in \mathbb{R}^2$ se llama *regular* si existe $u^{-1} \in \mathbb{R}^2$ al cual llamamos *el inverso* de u y que cumple $u^{-1}u = e$. Dada la cunmutatividad de $\mathbb{A}$ se usa la notación e/u para u^{-1}. Si $u \in \mathbb{R}^2$ no es regular, entonces u se llama *singular*. Si $u, v \in \mathbb{A}$ y v no es regular, el cociente u/v denota a uv^{-1}.

El $\mathbb{A}$-producot entre los elementos de la base canónica $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ está dado por $e_i e_j = \sum_{k=1}^{2} c_{ijk} e_k$ en donde $c_{ijk} \in \mathbb{R}$ para $i,j,k \in \{1,2\}$ se llaman *constantes de estructura* de $\mathbb{A}$. La *primera representación fundamental* de $\mathbb{A}$ es el homomorfismo inyectivo lineal $R : \mathbb{A} \to M(2,\mathbb{R})$ definido por $R : e_i \mapsto R_i$, en donde R_i es la matriz con $[R_i]_{jk} = c_{ikj}$, para $i = 1, 2$. La primera representación fundamental nos permite realizar operaciones del álgebra en la corresponiente álgebra de matrices.

El espacio lineal $\mathbb{R}^2$ equipado con el producto

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 \\ e_2 & e_2 & p_1 e_1 + p_2 e_2 \end{array} \tag{6}$$

es un álgebra $\mathbb{A}$ que denotamos por $\mathbb{A}_1^2(p_1,p_2)$, ver [5]. Esta familia de álgebras son asociativas, conmutativas y tienen elemento identidad $e=e_1$, ver también [12]. La primera representación fundamental de $\mathbb{A}_1^2(p_1,p_2)$ está dada por

$$R(e_1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R(e_2)=\begin{pmatrix} 0 & p_1 \\ 1 & p_2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

El espacio lineal $\mathbb{R}^2$ equipado con el producto

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & p_1e_1+p_2e_2 & e_1 \\ e_2 & e_1 & e_2 \end{array} \tag{8}$$

es un álgebra $\mathbb{A}$ que denotamos por $\mathbb{A}_2^2(p_1,p_2)$, ver [5]. Esta familia de álgebras son asociativas, conmutativas y tienen elemento identidad $e=e_2$, ver también [12]. La primera representación fundamental de $\mathbb{A}_2^2(p_1,p_2)$ está dada por

$$R(e_1)=\begin{pmatrix} p_1 & 1 \\ p_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R(e_2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

1.2 $\varphi\mathbb{A}$-diferenciabilidad

La diferenciabilidad pretorcida se define en [10], esta diferenciabilidad es una generalización de la diferenciabilidad de Lorch que permite resolver familias más grandes de ecuaciones diferenciales parciales. Aquí daremos la definición de diferenciabilidad pretorcida para campos vectoriales planares.

Sea $\mathbb{A}$ un álgebra, φ campo vectorial planar diferenciable en el sentido usual. Diremos que un campo vectorial planar $\mathcal{F}$ es $\varphi\mathbb{A}$-*diferenciable (diferenciable pretorcido)* si $\mathcal{F}$ es diferenciable en el sentido usual y si existe un campo vectorial planar $\mathcal{F}'_\varphi$ al cual llamamos $\varphi\mathbb{A}$-*derivada* de $\mathcal{F}$, tal que

$$d\mathcal{F}_p=\mathcal{F}'_\varphi(p)d\varphi_p, \qquad p=(x,y), \tag{10}$$

en donde $\mathcal{F}'_\varphi(p)d\varphi_p(v)$ denota al producto con respecto a $\mathbb{A}$ de $\mathcal{F}'_\varphi(p)$ y $\varphi_p(v)$ para cada vector v en $\mathbb{R}^2$.

Las funciones polinomiales son diferenciables para la diferenciabilidad pretorcida, ver [9], [10], y satisfacen las reglas usuales de diferenciación. El caso de las funciones racionales se van a definir en el conjunto preimagen del conjunto de los elementos regulares de $\mathbb{A}$ bajo el polinomio del denominador. También las funciones racionales, exponencial, trigonométricas son diferenciales y cumplen las reglas usuales de diferenciación. Por lo tanto, para la $\varphi\mathbb{A}$-derivada se tiene un $\varphi\mathbb{A}$-cálculo. Como también se cumple el Teorema Integral de Cauchy para la $\varphi\mathbb{A}$-derivada, también se tienen ecuaciones $\varphi\mathbb{A}$-diferenciales, ver [10].

2 Sobre soluciones de problemas de Cauchy mediante álgebras

En esta sección enunciamos algunos resultados dados en [10] en los cuales se resuelven los problemas de Cauchy dados en (4).

Los siguientes dos teoremas se enuncian y prueban en la Sección 3 de [10].

Theorem 2.1 *Para $AB \neq 0$ y $C = 0$ se toma $\mathbb{A} = \mathbb{A}_2^2(-B/A, 0)$. Suponga que (4) satisface $a_{k+1} = -\frac{B}{A}\frac{b_k}{k+1}$ para $k \in \mathbb{N}$. Así, la solución del problema de Cauchy (4) es dada por la primera componente de la función*

$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} (r_k, s_k)\,(x,t)^k, \tag{11}$$

en donde $(r_0, s_0) = (a_0, s_0)$ (s_0 puede tomar cualquier valor), $(r_1, s_1) = (b_0, a_1 + \frac{B}{A}b_0)$, and

$$(r_k, s_k) = \left(\left(-\frac{B}{A}\right)^k \frac{a_k}{2}, \left(-\frac{B}{A}\right)^{k-1} \frac{a_k}{2}\right), \qquad k \geq 2. \tag{12}$$

Theorem 2.2 *La solución del problema de Cauchy (4) es dada por una componente de la función diferenciable pretorcida $w(x,t)$ que se da explícitamente en los siguientes casos:*

1) Para $C \neq 0$, tomamos $\varphi(x,t) = (x,t)$, y un álgebra $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1^2(p_1, p_2)$ con paramétros p_1 y p_2 dados por

$$p_1 = -\frac{A}{C}, \qquad p_2 = -\frac{B}{C}. \tag{13}$$

Así, una solución (4) es dada por la segunda función conjugada de

$$w(x,t) = (r_0, a_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b_k}{k+1} + \frac{B}{C}a_{k+1}, a_k\right) \varphi(x,t)^{k+1}, \tag{14}$$

en donde r_0 puede tomar cualquier valor.

2) Para $C \neq 0$, tomamos $\varphi(x,t) = (x + bt, dt)$ tal que $d \neq 0$, y $A + Bb + Cb^2 \neq 0$, un álgebra $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1^2(p_1, p_2)$ con paramétros p_1 y p_2 dados por

$$p_1 = -\frac{A + Bb + Cb^2}{Cd^2}, \qquad p_2 = -\frac{Bd + 2Cbd}{Cd^2}. \tag{15}$$

Así, una solución de (4) es dada por la primera función conjugada de

$$w(x,t) = (a_0, s_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_{k+1}, -\frac{ba_{k+1}}{p_1 d} + \frac{b_k}{p_1 d(k+1)}\right) \varphi(x,t)^{k+1}, \tag{16}$$

en donde s_0 puede tomar cualquier valor.

3) Para $B \neq 0$ y $|A| + |C| = 0$, tomamos $\varphi(x,t) = (x-t, x+t)$ y $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1^2(1,0)$. Así, una solución de (4) *es dada por la primera función conjugada de*

$$w(x,t) = (a_0, s_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_{k+1}, a_{k+1} + \frac{b_k}{k+1} \right) \varphi(x,t)^{k+1}, \tag{17}$$

en donde s_0 puede tomar cualquier valor.

3 Solución de ecuación de onda mediante álgebras

Primero usaremos al Teorema 2.2 para encontrar la solución. Luego, aunque no sea necesario, daremos un teorema en el cual mostraremos además que la función encontrada sí es una solución.

Para el problema de Cauchy (5) que se está considerando se tiene que $A = 1$, $B = 0$, y $C = -1$. Por lo que el Teorema 2.1 no se puede aplicar, pues en este se pide que $C = 0$. En los casos 1) y 2) del Teorema 2.2 se tiene que C debe ser diferente de cero. Usando el caso 1) tenemos que para $\varphi(x,t) = (x,t)$, y el álgebra $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1^2(p_1, p_2)$ con paramétros p_1 y p_2 dados por

$$p_1 = -\frac{A}{C} = 1, \qquad p_2 = -\frac{B}{C} = 0. \tag{18}$$

Entonces $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1^2(1,0)$ y su primera representación fundamental está definida por

$$R(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Las series de Taylor de la funciones $\cos(x)$ y $\operatorname{sen}(x)$ están dadas por

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \operatorname{sen}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{20}$$

De donde obtenemos que $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$, $a_{2k+1} = 0$, $b_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$, y $b_{2k} = 0$.

Una solución (5) es dada por la segunda función conjugada de

$$w(x,t) = (r_0, a_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b_k}{k+1} + \frac{B}{C} a_{k+1}, a_k \right) (x,t)^{k+1}, \tag{21}$$

en donde r_0 puede tomar cualquier valor. Como $B = 0$ la igualdad (21) queda

$$w(x,t) = (r_0, a_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b_k}{k+1}, a_k \right) (x,t)^{k+1}. \tag{22}$$

Si descomponemos la suma en pares e impares obtenemos

$$w(x,t) = (r_0, a_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b_{2k}}{2k+1}, a_{2k} \right) (x,t)^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b_{2k+1}}{2k+2}, a_{2k+1} \right) (x,t)^{2k+2}. \tag{23}$$

Ahora sistituyendo los valores de las a_i y b_i obtenemos

$$w(x,t) = (r_0, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(0, \frac{(-1)^k}{(2k)!}\right)(x,t)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{(2k+2)!}, 0\right)(x,t)^{2k+2}. \tag{24}$$

Esto es

$$w(x,t) = (r_0, 1) + e_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(x,t)^{2k} - e_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!}(x,t)^{2k+2}. \tag{25}$$

luego

$$w(x,t) = (r_0 + 1, 1) + e_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(x,t)^{2k} - e_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(x,t)^{2k}. \tag{26}$$

De donde obtenemos la función $w(x,t)$ dada en el siguiente resultado.

Theorem 3.1 *La segunda componente de la función $w(x,t)$ dada por*

$$w(x,t) = (r_0 + 1, 0) + (e_2 - e_1)\cos(x,t) \tag{27}$$

es la solución del problema de Cauchy (5) *para cualquier valor de r_0.*

Proof. La función w dada en (27) es $\varphi\mathbb{A}$-diferenciable para $\varphi(x,t) = (x,t)$. Del Teorema 4.1 y 2) del Teorema 5.1 de [9] tenemos que la segunda componente w_2 de w dada en (27) es solución de la ecuación de onda $u_{tt} = u_{xx}$.

Para la función (27) tenemos que

$$w(x,0) = (r_0 + 1, 0) + (e_2 - e_1)\cos(x,0) = (r_0 + 1, 0) + (-1, 1)\cos(x).$$

Así, $w_2(x,0) = \cos(x)$.

La derivada parcial de la función (27) con respecto a t está dada por

$$w_t(x,t) = -e_2(e_2 - e_1)\,\mathrm{sen}(x,t) = (e_2 - e_1)\,\mathrm{sen}(x,t).$$

Luego, la derivada parcial de $w_2(x,0)$ con respecto a t está dada por $w_{2t}(x,0) = \mathrm{sen}(x)$. $\square$

4 Solución en términos de funciones elementales

Por el Teorema 3.1 de [10] tenemos que la segunda componente de la función (que se obtiene para $t_0 = -1$)

$$w(x,t) = (e_2 - e_1)\cos(x,t) \tag{28}$$

es solución del problema (5). Mediante una calculadora de matrices, usando la primera representación fundamental del álgebra $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1^2(1,0)$ tenemos que $w(x,t)$ está dada por

$$w(x,t) = (-\cos(t-x), \cos(t-x)). \tag{29}$$

Por lo tanto, la solución del problema (5) es

$$w_2(x,t) = \cos(t-x). \tag{30}$$

Usando que la función cos es una función par y la función $\mathrm{sen}(x)$ es una función impar, podemos efectivamente verificar que $w_2(x,t) = \cos(t-x)$ es la solución del problema (5).

References

[1] M. A. Alcorta, M. E. Frías-Armenta, M. E. Grimaldo, E. López-González, Algebrizability of vector fields, AVANZA-UACJ, Vol. VIII, (2018).

[2] M. A. Alcorta, M. E. Frías Armenta, M. E. Grimaldo-Reyna, E. López-González, Algebrization of Nonautonomous Diferential Equations, J. Appl. Math. Volume 2015, Article ID 632150, 10 pages (2015).

[3] A. Alvarez-Parrilla, M. E. Frías-Armenta, E. López-González, C. Yee-Romero, On Solving Systems of Autonomous Ordinary Diferential Equations by Reduction to a Variable of an Algebra, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences Volume 2012, Article ID 753916, 21 pages (2012).

[4] J. S. Cook, E. López-González, Algebrizability of systems of PDEs , In preparation (2021).

[5] M. E. Frías-Armenta, E. López-González, On geodesibility of algebrizable planar vector fields, Bol. Soc. Mat. Mex. (2019) 25:163-186.

[6] M. E. Frías-Armenta, E. López-González, Geodesibility of algebrizable three-dimensional vector fields, preprint arXiv:1912.00105.

[7] P. W. Ketchum, Analytic Functions of Hypercomplex Variables, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 30, (1928), pp. 641-667.

[8] P. W. Ketchum, A complete solution of Laplace's equation by an infinite hypervariable, Amer. Jour. Math., vol. 51, (1929), pp. 179-188.

[9] E. López-González, On solutions of PDEs by using algebras, Math. Methods Appl. Sci., Vol. 45, Issue 8, pages Pages 4834-4852 2022. https://doi.org/10.1002/mma.8073.

[10] E. López-González, E. A. Martínez-García, R. Torres-Córdoba, Pre-twisted calculus and differential equations. In preperation 2023.

[11] E. Lorch, The Theory of Analytic Functions in Normed Abelian Vector Rings, Trans. Amer. Math. Soc., 54 (1943) pp. 414 - 425.

[12] R. Pierce, Associative Algebras, Springer-Verlag, New York, Heidelberg Berlin (1982).

[13] Plaksa, S.A. Monogenic Functions in Commutative Algebras Associated with Classical Equations of Mathematical Physics. J. Math. Sci. 242, pp. 432-456 (2019). https://doi.org/10.1007/s10958-019-04488-3.

[14] A. Pogorui, R. M. Rodríguez-Dagnino, M. Shapiro, Solutions for PDEs with constant coefficients and derivability of functions ranged in commutative algebras, Math. Methods Appl. Sci. 37(17), 2799-2810 (2014).

[15] R. D. Wagner, The generalized Laplace equations in a function theory for commutative algebras, Duke Math. J. Volume 15, Number 2 (1948), 455-461.

[16] J. A. Ward. From generalized Cauchy-Riemann equations to linear algebra, Proc. Amer. Math. Soc. 4(3) (1953), pp. 456-461.