

Título del Proyecto de Investigación
al que corresponde el Reporte Técnico:

Aplicaciones de las teorías de tipos a la retícula de generalizaciones de la teoría de torsión de Goldie, así como a la estructura de los anillos regulares autoinyectivos.

Sin financiamiento

Fecha de Inicio: 01/01/2021
Fecha de Término: 31/12/2022

Tipo de Reporte

Parcial

Final

Autor (es) del reporte técnico:

Dr. Gustavo Tapia Sánchez

TÍTULO DEL REPORTE TÉCNICO

Aplicaciones de las teorías de tipos a la retícula de generalizaciones de la teoría de torsión de Goldie, así como a la estructura de los anillos regulares autoinyectivos.

Resumen del reporte técnico en español (máximo 250 palabras)

El proyecto de investigación logró tanto el objetivo general, como el específico, así como el cumplimiento de cada una de las metas fijadas desde el inicio del proyecto, recalcando que se logró escribir un artículo de investigación, primeramente en español y posteriormente en inglés, el cual se encuentra listo para ser enviado a una revista de prestigio internacional en el área, para su aprobación y publicación.

Resumen del reporte técnico en inglés (máximo 250 palabras):

The research project achieved both the general objective and the specific one, as well as the fulfillment of each one of the goals set from the beginning of the project, emphasizing that it was possible to write a research article, first in Spanish and later in English, the which is ready to be sent to a prestigious international journal in the area, for its approval and publication.

Palabras clave:

Teorías de torsión, tipos de Kaplansky, anillos regulares autoinyectivos.

Usuarios potenciales (del proyecto de investigación)

Investigadores en el área de las teorías de torsión y/o en el área de los anillos regulares autoinyectivos.

Reconocimientos

No aplica

1. Introducción

En las últimas décadas, las investigaciones en teoría de anillos han puesto de manifiesto que existe una íntima relación, entre las teorías de torsión, que son generalizaciones de la teoría de torsión de Goldie y las teorías de tipos, en especial, la teoría de tipos de Kaplansky.

Mediante el uso de la teoría de tipos de Kaplansky, contextualizada en el marco de todas las generalizaciones de la teoría de torsión de Goldie, es factible, por un lado, descubrir aspectos reticulares muy interesantes de dicho marco, y por otro, obtener diversas caracterizaciones de los anillos regulares autoinyectivos de cada uno de los tipos de Kaplansky, en términos de dichas teorías de torsión de Kaplansky.

Esta investigación estuvo enfocada en obtener estas relaciones, así como teoremas de caracterización de los anillos regulares autoinyectivos.

2. Planteamiento

Aplicar algunas teorías de tipos (definidas en [7]), específicamente la teoría de tipos de Kaplansky y/o subteorías de ésta, así como las teorías de torsión de los tipos correspondientes (definidas en [8]), para estudiar la estructura interna de la retícula de generalizaciones de la teoría de torsión de Goldie, y utilizar los resultados obtenidos para obtener teoremas de estructura para los anillos regulares autoinyectivos.

2.1 Justificación

En [8], Tapia, Castro y Ríos, definen, dada una teoría de tipos, cuando una teoría de torsión, en la retícula de generalizaciones de la teoría de torsión de Goldie, es de un tipo específico, y prueban que estas clases de teorías de torsión, inducen una descomposición

reticular del marco $gen(\tau_g, Q)$.

Mediante esta herramienta, obtienen entonces teoremas de caracterización de los anillos regulares autoinyectivos, utilizando lo que ellos llaman teorías de torsión ínfimas de algún tipo específico.

Sin embargo, estos resultados no dejan de ser muy generales, y fue el propósito de la presente investigación, obtener resultados particulares de toda esta teoría, utilizando una teoría de tipos especial, y tal vez la más importante: la teoría de tipos de Kaplansky.

2.2 Antecedentes

Por un lado, los anillos regulares autoinyectivos han sido ampliamente estudiados por diversos autores desde mediados del siglo XX (ver [2], [3] y [4]); por otro lado, la

retícula de generalizaciones de la teoría de torsión de Goldie también ha sido ampliamente estudiada por diversos autores, igualmente en la segunda mitad del siglo XX (ver [1], [5] y [6]). Fueron Raggi y Ríos quienes descubrieron el vínculo entre ambas estructuras algebraicas (ver [5]) lo que ha generado una línea de investigación en esa dirección (ver [8]).

Referente a los anillos regulares autoinyectivos, una de las teorías más fructíferas fue la teoría de tipos de Kaplansky (ver [4]) la cual resultó ser muy útil para obtener teoremas de estructura y clasificación en cada uno de los tipos de Kaplansky, de los anillos regulares autoinyectivos (ver [2]).

En [3], Goodearl y Boyle desarrollan una teoría de tipos de Kaplansky en la subcategoría plena $Mod-(R, \tau_g)$, de los R-módulos inyectivos no singulares, a través del anillo de endomorfismos $End_R M$, el cual resulta ser un anillo regular autoinyectivo, y como tal, puede clasificarse en los tipos de Kaplansky; entonces, investigan las condiciones internas que debe satisfacer el R-módulo M, para que su anillo de endomorfismos sea de un tipo determinado.

En [7], Ríos y Tapia generalizan la teoría de tipos de Kaplansky y la teoría de tipos de Goodearl y Boyle para obtener lo que llamaron “una teoría general de tipos para módulos inyectivos no singulares”, la cual tiene como casos particulares a las teorías de tipos anteriores.

Por otro lado, en [5], Raggi y Ríos encuentran una relación entre los idempotentes centrales de un anillo regular autoinyectivo Q y la retícula $gen(\tau_g, Q)$, de generalizaciones de la teoría de torsión de Goldie, de tal manera que es de esperarse que la teoría general de tipos pueda estudiarse en el contexto de $gen(\tau_g, Q)$.

3. Objetivos (general y específicos)

Objetivo general:

Aplicar algunas teorías de tipos sobre la retícula de generalizaciones de la teoría de torsión de Goldie, específicamente la teoría de tipos de Kaplansky y/o subteorías de ésta, para obtener información, por un lado, sobre cómo se distribuyen las teorías de torsión ínfimas correspondientes, y por otro, sobre cómo se estructuran dichas teorías de torsión, en términos de las clases TT que definen a la teoría de tipos específica.

Objetivo específico:

Aplicar los resultados obtenidos sobre la retícula de generalizaciones de la teoría de torsión de Goldie para obtener teoremas de estructura de los anillos regulares autoinyectivos.

4. Metas

- 4.1 Definir las teorías de torsión de cada uno de los tipos, respecto a la teoría de tipos de Kaplansky, siguiendo la relación entre las teorías de tipos y las teorías de torsión.
- 4.2 Obtener caracterizaciones sobre la estructura de las teorías de torsión ínfimas de cada uno de los tipos de Kaplansky.

- 4.3 Estudiar las consecuencias de la forma en cómo se distribuyen las teorías de torsión ínfimas de los tipos de Kaplansky sobre la retícula de generalizaciones de la teoría de torsión de Goldie.
- 4.4 Aplicar los resultados obtenidos para hallar teoremas de estructura y/o caracterización de los anillos regulares autoinyectivos.
- 4.5 Escribir un artículo de investigación con los resultados obtenidos, el cual pueda ser enviado para su publicación a una revista especializada en el área, preferentemente de prestigio internacional.

5. Plan de trabajo

El trabajo se desarrolló mediante comunicación por internet, principalmente el correo electrónico, y en algunas ocasiones mediante el uso de plataformas digitales como Zoom.

El plan de trabajo se ideó por semestres como sigue:

Enero – junio de 2021:

Recopilación sobre el estado del arte respecto al problema a investigar y estudiar los artículos que sean necesarios para poder comenzar la investigación propia.

Agosto – diciembre de 2021:

Dada una teoría de torsión la cual es una generalización de la teoría de torsión de Goldie, definir el tipo de Kaplansky de ésta, y estudiar la estructura de las teorías de torsión ínfimas de cada tipo.

Enero – junio de 2022:

Investigar la distribución reticular de las teorías de torsión ínfimas, así como la estructura de las subretículas correspondientes a cada tipo. Asimismo, aplicar los resultados obtenidos para caracterizar a los anillos regulares autoinyectivos.

Los investigadores encargados de coordinar esta parte, serán los Drs. externos a la UACJ, quienes comunicarán los resultados que se obtengan, para que, todos los participantes de la investigación, revisemos exhaustivamente las demostraciones de los teoremas obtenidos. La comunicación entre todos los participantes, principalmente por medios electrónicos (Redes

sociales, Zoom, etc.) fue fundamental a lo largo de todo este proceso.

Agosto – diciembre de 2022:

Recopilación de los resultados obtenidos a lo largo del desarrollo del presente proyecto, con el fin de escribir un artículo de investigación que pueda ser enviado para su publicación en alguna revista especializada en el área, preferentemente de prestigio internacional.

6. Instituciones, organismos o empresas de los sectores social, público o productivo participantes (Si aplica)

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

Universidad Nacional Autónoma de México

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, CCM.

7. Productos generados

El producto generado por la presente investigación, fue un artículo de investigación, el cual fue redactado en el idioma inglés.

8. Mecanismos de transferencia. (Si aplica)

No aplica

9. Contribución e impacto del proyecto

El artículo puede tener un fuerte impacto en aquellos investigadores que se dedican a estudiar las propiedades reticulares del marco de las teorías de torsión que son generalizaciones de la teoría de torsión de Goldie.

10. Impacto económico, social y/o ambiental en la región

Este tipo de proyectos entre investigadores de diferentes universidades del país, promueve el espíritu científico en los profesores de nuestra universidad, lo que a su vez tiene un alto impacto en el logro de los objetivos que se ha planteado la UACJ para sus profesores-investigadores.

11. Referencias (bibliografía)

- [1] Golan, J., Torsion theories, Longman Scientific & Technical, Harlow (1986).
- [2] Goodearl, K. R., von Neumann Regular Rings, Monographs and Studies in Mathematics Series, vol. 33, New York, Dekker, 1976.
- [3] Goodearl, K. R. and Boyle, A. K., Dimension theory for nonsingular injective modules, Memoirs American Math. Soc. 177 (1976).
- [4] Kaplansky, I., Rings of Operators, New York, Benjamin, 1968.
- [5] Raggi, F. and Ríos, J., On the lattice structure of torsion theories, Communications in Algebra, 19 (2), pp. 669-674 (1991).

[6] Ríos, J., Algunos aspectos de la teoría de torsión de Goldie, Tesis Doctoral, Fac. de Ciencias, Univ. Nac. Autónoma de México, 1989.

[7] Ríos, J. and Tapia, G., A general theory of types for noningular injective modules, Communications in Algebra, 20 (8), pp. 2337-2364 (1992).

[8] Tapia, G., Castro, J. y Ríos, J., Algunas relaciones entre las teorías de torsión y las teorías de tipos, AVANZA: Álgebra, Biomatemáticas y Sistemas Dinámicos, vol. VIII, ISBN: 978-607-520-363-8, UACJ, México, 2020.

12. Anexos

Artículo de investigación en PDF.

12.1 Taxonomía de los Roles de Colaborador (con las actividades logradas)

Roles	Definición de los roles	Nombre de él(la) investigador(a)	Figura	Grado de contribución	Actividades logradas durante el proyecto	Tiempo promedio semanal (en horas) dedicado al proyecto
1. Responsabilidad de la dirección del proyecto 2. Realización y redacción de la propuesta 3. Elaboración del análisis formal de la investigación	1. Coordinar la planificación y ejecución de la actividad de investigación. Organiza los roles de cada colaborador, tiene la habilidad de identificar potenciales de cada individuo para generar una sinergia de equipo colaborativo. 2. Preparación, creación y redacción de la propuesta de investigación, específicamente la redacción, revisión de coherencia del texto, presentación de los datos y la normatividad aplicable para garantizar el cumplimiento de los requisitos.	Dr. Gustavo Tapia Sánchez	1. Director del proyecto 2. Supervisor del proyecto 3. Redactor de la propuesta 4. Analista de datos	Principal	1. Elaboración del protocolo de investigación. 2. Recopilación de información. 3. Obtención de resultados de la investigación. 4. Análisis de la información. 5. Redacción del documento final	10

	<p>3.</p> <p>Aplicar métodos estadísticos, matemáticos, computacionales, teóricos u otras técnicas formales para analizar o sintetizar los datos del estudio. Verifica los resultados preliminares de cada etapa del análisis, los experimentos implementados y otros productos comprometidos en el proyecto.</p>				(en español)	
<p>1. Responsabilidad de supervisión</p> <p>2. Realización y redacción de la propuesta</p> <p>3. Elaboración del análisis formal de la investigación</p>	<p>1. Elaborar la planificación de las actividades de la investigación (cronogramas y controles de seguimiento), describe los roles identificados por el director del proyecto y facilita el apoyo constante a todos los roles para conseguir un trabajo integral, coherente y que llegue a buen término.</p> <p>2. Preparación, creación y redacción de la propuesta de investigación, específicamente la redacción, revisión de coherencia del texto, presentación de los datos y la normatividad aplicable para garantizar el cumplimiento de los requisitos.</p> <p>3. Aplicar métodos</p>	Dr. Jaime Castro Pérez	<p>1. Supervisor del proyecto</p> <p>2. Redactor de la propuesta</p> <p>3. Analista de datos</p>	De apoyo	<p>1. Recopilación de información.</p> <p>2. Obtención de resultados de la investigación.</p> <p>3. Análisis de la información.</p> <p>4. Redacción del documento final (en español)</p>	5

	estadísticos, matemáticos, computacionales, teóricos u otras técnicas formales para analizar o sintetizar los datos del estudio. Verifica los resultados preliminares de cada etapa del análisis, los experimentos implementados y otros productos comprometidos en el proyecto.					
<p>1. Responsabilidad de supervisión</p> <p>2. Realización y redacción de la propuesta</p> <p>3. Elaboración del análisis formal de la investigación</p>	<p>1. Elaborar la planificación de las actividades de la investigación (cronogramas y controles de seguimiento), describe los roles identificados por el director del proyecto y facilita el apoyo constante a todos los roles para conseguir un trabajo integral, coherente y que llegue a buen término.</p> <p>2. Preparación, creación y redacción de la propuesta de investigación, específicamente la redacción, revisión de coherencia del texto, presentación de los datos y la normatividad aplicable para garantizar el cumplimiento de los requisitos.</p>	Dr. José Ríos Montes	<p>1. Supervisor del proyecto</p> <p>2. Redactor de la propuesta</p> <p>3. Analista de datos</p>	De apoyo	<p>1. Recopilación de información.</p> <p>2. Obtención de resultados de la investigación.</p> <p>3. Análisis de la información.</p> <p>4. Redacción del documento final (en español)</p>	5

	3. Aplicar métodos estadísticos, matemáticos, computacionales, teóricos u otras técnicas formales para analizar o sintetizar los datos del estudio. Verifica los resultados preliminares de cada etapa del análisis, los experimentos implementados y otros productos comprometidos en el proyecto.					
1. Preparación, creación y/o presentación de los productos o entregables	1. Traducción del documento final al idioma inglés.	Dr. Francisco Ávila Álvarez1.	Traductor del documento final	Principal		2

12.1.1 Estudiantes participantes en el proyecto

Nombre de estudiante(s)	Matrícula	Tiempo promedio semanal (en horas) dedicado al proyecto	Actividades logradas en la ejecución del proyecto
Erick Aguirre Mondragón	147834	2	Recopilación de toda la información obtenida a lo largo del proyecto.

CONSIDERACIONES:

- Los reportes deben estar escritos en español o en inglés.
- Se debe entregar en formato PDF acorde a este formato.

- El texto debe ser escrito en hoja tamaño carta a espacio y medio, y los márgenes deberán encontrarse al menos a una pulgada (2.54 cm). La totalidad del texto debe escribirse en minúsculas, utilizando las mayúsculas sólo al principio de las oraciones y para los títulos de capítulos.
- Se recomienda usar el tipo de letra Arial tamaño 10 o Times New Roman tamaño 12.
- Todas las páginas deben estar numeradas en secuencia comenzando desde la portada.
- La extensión total del texto es de un mínimo de 10 cuartillas y un máximo de 30 cuartillas, con un interlineado de espacio y medio.
- Integrar en la sección de anexos las tablas y gráficas.
- Las figuras, fotografías y tablas, serán insertadas en el cuerpo del texto y numeradas en forma consecutiva comenzando con 1 y de manera independiente de las tablas. El número y descripción de la figura, tabla, etc., deberá colocarse antes de la misma.
- Se recomienda evitar el uso de sombras y líneas punteadas que no permitan una legibilidad clara de imágenes.
- Las fórmulas y ecuaciones deben hacerse con un editor de ecuaciones como el disponible en el procesador de textos Word. Estarán centradas y separadas del texto. La numeración será consecutiva comenzando con el número 1. El número de la fórmula deberá encerrarse entre paréntesis y colocarse a la derecha de la fórmula lo más cercano posible al margen derecho.
- Las referencias bibliográficas en el texto deben ser en cualquier estilo reconocido como APA, MLA, ISO, etc.
- Los anexos se colocarán al final del documento después de la bibliografía, utilizando caracteres alfabéticos para distinguirlos: Anexo A, Anexo B, etc. La información contenida en los anexos es importante pero no indispensable para la comprensión del trabajo. Se recomienda colocar en los anexos mapas, fotografías, tablas, desarrollos matemáticos, diagramas, etc.
- La Taxonomía de los Roles de Colaborador, incluyendo la explicación de su llenado y las actividades a desarrollar, está disponible en los Términos de Referencia de los Proyectos Sin financiamiento, en el numeral 4.4.1 y en la tabla 1. Se debe integrar la tabla

correspondiente en el apartado de los anexos y (en este caso sí deberá llevar los nombres de los investigadores propuestos en cada rol).