

# PISTAS EDUCATIVAS

VOLUMEN 43 • No. 141 • ENERO 2022 • ISSN: 2448-847X  
Difusión vía red de cómputo, libre acceso y sin costo por publicación



**Número Semestral  
enero-junio 2022**



**EDUCACIÓN**  
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

**TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO**



## **PISTAS EDUCATIVAS**

Pistas Educativas, Año 2022, No. 141, número semestral enero-junio 2022, publicada y editada por el Tecnológico Nacional de México dependiente de la Secretaría de Educación Pública, a través del Instituto Tecnológico de Celaya, Av. Universidad 1200, 5to Piso, Colonia Xoco, Alcaldía Benito Juárez CP 03330, Ciudad de México, Tel. 5536002500 Ext. 65064, [d\\_vinculacion05@tecnm.mx](mailto:d_vinculacion05@tecnm.mx), Editor Responsable Héctor Rojas Garduño. **Reserva de derechos al uso exclusivo No. 04-2016-120613261600-203, ISSN: 2448-847X**, ambos son otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor.

Responsable de la última actualización de este número Héctor Rojas Garduño, Coordinador de Métodos y Medios Educativos, Instituto Tecnológico de Celaya, Antonio García Cubas Pte #600 esquina Av. Tecnológico, Colonia Alfredo V. Bonfil, CP 38010, Celaya, Gto, Tel. 4616117575 Ext 5146, 27 de junio del 2022.

Pistas Educativas tiene como objetivo ser un espacio de acceso abierto y gratuito para que investigadores, docentes, alumnos y público interesado, publiquen los resultados de investigaciones científicas, educativas, tecnológicas y ensayos de cualquier área de conocimiento.

Las publicaciones de los artículos son sometidas a revisión por pares abierta y el contenido es responsabilidad de los autores y no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación.

Queda prohibida la reproducción parcial o total de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización del Instituto encargado, salvo que sea citada la fuente de origen.

## **DIRECTORIO TecNM**

**Enrique Fernández Fassnacht**

*Director*



## **DIRECTORIO TecNM en Celaya**

**José López Muñoz**

*Director*

**José Antonio Vázquez López**

*Subdirector Académico*

**Martín Campos Moreno**

*Subdirector de Servicios Administrativos*

**María del Consuelo Gallardo Aguilar**

*Subdirectora de Planeación y Vinculación*

**Teresita de las Nieves Armengol Rico**

*Jefa Departamento de Desarrollo Académico*



**PISTAS EDUCATIVAS**

[pistaseducativas@itcelaya.edu.mx](mailto:pistaseducativas@itcelaya.edu.mx)

# **PISTAS EDUCATIVAS**

## ***Editor Responsable***

Héctor Rojas Garduño  
*Tecnológico Nacional de México en Celaya, México*

## ***Consejo Editorial***

Dra. Martha Ríos Manríquez  
*Universidad de Guanajuato, Campus Celaya-Salvatierra, México*

Dr. José Antonio Vázquez López  
*Tecnológico Nacional de México en Celaya, México*

Dra. María Sánchez Fernández  
*Universidad de la Coruña, España*

## ***Comité Científico***

Dr. Miguel Magos Rivera, *Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, México*  
Dra. Norma Macedo Flores, *Universidad Autónoma del Estado de México, México*  
Dr. Juan Gaspar Vargas Rubio, *Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, México*  
M.C. Julio Asato España, *Tecnológico Nacional de México / IT de Celaya, México*  
Dr. Oscar Andrés Vivas Albán, *Universidad del Cauca, Colombia*  
Dr. Francisco Antonio Varela Muzzati, *Agencia Bolivariana para Actividades Espaciales, Venezuela*  
Dr. Aníbal Uriel Pacheco Sánchez, *Universidad Autónoma de Barcelona, España*  
Dr. René Arechiga Martínez, *New Mexico Tech Electrical Engineering Department, Estados Unidos*  
Dr. Carlos Alberto Esquit Hernández, *Universidad del Valle de Guatemala, Guatemala*  
Dr. Rosendo Franco Rodríguez, *Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú*  
Dr. Víctor Manuel Zamudio Rodríguez, *Tecnológico Nacional de México / IT de León, México*  
Dr. Osslán Osiris Vergara Villegas, *Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México*  
Dr. Ramiro Velázquez Guerrero, *Universidad Panamericana Aguascalientes, México*  
Dr. Javier Vega Pineda, *Tecnológico Nacional de México / IT de Chihuahua, México*  
Dr. Ernesto R. Vázquez Cerón, *Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, México*  
Dr. Ricardo Fuentes Covarrubias, *Universidad de Colima, México*  
Dra. Beatriz Adriana González Beltrán, *Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, México*  
M.C. Edgar Alberto Espinoza Zallas, *Universidad Estatal de Sonora, México*  
Dr. Luis Alejandro Flores Oropeza, *Universidad Autónoma de Aguascalientes, México*

Dra. Rafaela Blanca Silva López, **Universidad Autónoma Metropolitana-Lerma, México**  
M.C. María del Carmen Ruiz Robledo, **Universidad Tecnológica de León, México**  
Dra. Grethel Georgina Pérez Sánchez, **Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, México**  
Dra. Yolanda Pérez Pimentel, **Tecnológico Nacional de México / ITS de Huichapan, México**  
Dra. Diana Mireya Nieto Hipólito, **Universidad Tecnológica de Ciudad Juárez, México**  
Dr. Marco Antonio Escobar Acevedo, **Universidad de la Salle Bajío, México**  
M.C. Francisco Javier Enríquez Aguilera, **Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México**  
Dr. Rene Edmundo Cuevas Valencia, **Universidad Autónoma de Guerrero, México**  
Dra. Alma Delia Cuevas Rasgado, **Universidad Autónoma del Estado de México-Texcoco, México**  
Dra. Vianey Guadalupe Cruz Sánchez, **Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México**  
M.C. Adrián Chávez Cruz, **Tecnológico Nacional de México / ITS de Huichapan, México**  
M.C. Vicente Capistran Gómez, **Universidad Politécnica de Chiapas, México**  
Dr. Daniel Ulises Campos Delgado, **Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México**  
M.C. Gabriel Bravo Martínez, **Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México**  
Dra. Maricela Bravo Contreras, **Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, México**  
Dr. Carlos Astorga Zaragoza, **Tecnológico Nacional de México / CENIDET, México**  
Dra Ma. del Rocío Abascal Mena, **Universidad Autónoma Metropolitana-Cuajimalpa, México**  
Dr. Héctor Garcés Guzmán, **Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México**  
Dr. Vicente García Jiménez, **Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México**  
Dr. Jesús Vicente González Sosa, **Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, México**  
Dr. Víctor Manuel Hinostraza Zubia, **Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México**  
Dr. Juan Ramón Jiménez Alaníz, **Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, México**  
Dr. José Raymundo Lira Cortes, **Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, México**  
Dr. Edgar López Delgadillo, **Universidad Autónoma de Aguascalientes, México**  
Dr. Erick López Ornelas, **Universidad Autónoma Metropolitana-Cuajimalpa, México**  
Dr. Francisco López Orozco, **Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México**  
Dr. Luís Lujan Vega, **Tecnológico Nacional de México / IT de Ciudad Delicias, México**  
Dr. Rafael Martínez Peláez, **Universidad de la Salle Bajío, México**  
Dr. Luís Carlos Méndez González. **Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México**  
M. C. Jerry Reider Burstin, **Universidad Anáhuac-México Norte, México**  
Dr. José Alejandro Reyes Ortiz, **Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, México**  
Dr. Edgar Rivas Araiza, **Universidad Autónoma de Querétaro, México**  
Dr. Elías José J Rodríguez Segura, **Tecnológico Nacional de México / IT de Celaya, México**  
Dr. Ismael Osuna Galán, **Tecnológico Nacional de México / ITS de Huichapan, México**  
Dr. Javitt HigmarNahitt Padilla Franco, **Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México**  
M. C. Felipe Santiago Espinosa, **Universidad Tecnológica de la Mixteca, México**  
M. I. Ana Mayra Luna Rodríguez, **Tecnológico Nacional de México / ITS de Cajeme, México**  
M. C. Miguel Ángel Gil Ríos, **Universidad Tecnológica de León, México**  
M. E. Joaquín Godoy Mendoza, **Universidad Tecnológica de Ciudad Juárez, México**  
M. C. Williams Gómez López, **Tecnológico Nacional de México / ITS de Huichapan, México**

# ESTABILIZACIÓN DEL CARRO PÉNDULO INVERTIDO APLICANDO CONTROL ÓPTIMO NO LINEAL VARIANTE EN TIEMPO

*STABILIZATION OF A CART INVERTED PENDULUM APPLYING  
NONLINEAR TIME-VARYING OPTIMAL CONTROL*

**Jorge Antonio Cardona Soto**

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México  
*al206597@alumnos.uacj.mx*

**Israel U. Ponce**

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México  
*israel.ulises@uacj.mx*

**Israel Soto**

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México  
*angel.soto@uacj.mx*

**Manuel de Jesús Nandayapa Alfaro**

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México  
*mnandayapa@uacj.mx*

**Recepción:** 28/octubre/2021

**Aceptación:** 26/enero/2022

## Resumen

El control óptimo LQR es una opción adecuada para la obtención de las ganancias de control realimentado, sin embargo, en sistemas dinámicos no lineales su aplicación se ve limitada a una región local. En este trabajo se propone resolver el problema de control óptimo del tipo LQR, utilizando un sistema equivalente lineal en vez de llevar a cabo la linealización, esto permite extender la región donde el controlador LQR puede funcionar adecuadamente. Para probar el método propuesto, se realizan simulaciones donde se aplica el control LQR de los sistemas linealizado y equivalente lineal al sistema carro péndulo invertido. Los resultados muestran que el sistema equivalente lineal tiene un mejor índice de desempeño que el sistema linealizado.

**Palabras Clave:** Carro péndulo invertido, control óptimo, linealización, LQR.

## **Abstract**

*Optimal control, based in LQR, is a suitable option for obtaining feedback control gains, however, in non-linear dynamic systems its application is limited to a local region. In this work, it is proposed to solve the optimal control problem (based in LQR) using a linear equivalent system. To evaluate the proposed method, the LQR control of the linearized and linear equivalent systems is applied in a simulation environment to a cart inverted pendulum system. The results show that the linear equivalent system has a better performance index than the linearized system.*

**Keywords:** *Cart inverted pendulum, linearization, LQR, optimal control.*

## **1. Introducción**

El análisis y diseño de controladores es importante en diferentes áreas del conocimiento, ya que ayudan a predecir y modificar el comportamiento de los sistemas dinámicos [Nasir, 2008]. Existen diferentes técnicas o enfoques que permiten realizar este análisis y diseño de controladores en sistemas dinámicos, entre las que se encuentran técnicas de control lineal que en muchos casos muestran mayor eficiencia debido a su sencillez tanto en el diseño como en la implementación [Li, 2012]. La aplicación de estas técnicas de control lineal tiene un buen desempeño cuando las trayectorias del sistema se encuentran en una región local cercana al punto de linealización. El desempeño de los controladores lineales se vuelve ineficiente cuando las trayectorias del sistema se alejan del punto de linealización, esto se debe a que las dinámicas no lineales tienen un mayor efecto cuanto más lejos se encuentren las trayectorias del punto de linealización [Vinodh, 2013].

Uno de los controladores muy utilizados es el control óptimo, en particular, el regulador lineal cuadrático (LQR), el cual nos permite encontrar el valor de las ganancias de un sistema retroalimentado en base a un índice de desempeño [Wang, 2010], [Prasad, 2012]. Este controlador ha sido aplicado eficientemente a distintos sistemas no lineales; sin embargo, para su aplicación se requiere linealizar previamente el sistema. Esto restringe el área de aplicación del controlador a una región local [Xiong, 2010], [Habib, 2020], que, en algunos casos, debido a las no

linealidades del sistema dinámico pudiera llegar a ser muy restrictivo. En este trabajo se propone extender la región de trabajo del control LQR para un sistema no lineal, al resolver las ecuaciones diferenciales de Riccati utilizando un sistema equivalente lineal variante en tiempo que sea dependiente de las trayectorias del sistema. Como resultado se espera que las ganancias del controlador varíen de acuerdo con las trayectorias del sistema, y como resultado, se tenga un mejor desempeño que en el caso de utilizar la linealización del sistema. Para probar el método propuesto, se aplican los controladores obtenidos a partir de los sistemas linealizados y equivalente lineal en un sistema carro péndulo invertido. El carro péndulo invertido ha demostrado ser una plataforma experimental muy útil para probar controladores, ya que este es un tipo de sistemas pendulares que bien puede representar el comportamiento de diversos mecanismos y sistemas robóticos muy utilizados [Morales, 2018].

El control LQR ha sido aplicado ampliamente para el control de diversos sistemas dinámicos, como en los vehículos subactuados, debido a su proceso de ajuste intuitivo y sus propiedades de estabilidad y robustez [Lustosa,2018]. En [Xu, 2011] se utiliza un control óptimo LQR para lograr la estabilización de un unicycle, el cual corresponde a un sistema subactuado, el método propuesto logra estabilizar el unicycle para lo cual se utiliza la linealización del sistema. También se puede ver en [Angkeaw, 2019] se elige un control basado en LQR para la estabilización de un sistema de levitación magnética, esto debido a su robustez y alto desempeño. Se han hecho algunas modificaciones en el control LQR para lograr un mejor desempeño, como en [Engin, 2018] donde se combina el control LQR con un modelo de identificación de parámetros, aunque muestra un buen desempeño ante variaciones paramétricas, su aplicación se ve restringida a un área local. También el control LQR ha sido utilizado para el control de posición de un cuadricóptero, el cual es un vehículo no tripulado que presenta dinámicas no lineales con seis grados de libertad, el sistema en lazo cerrado mostró una gran estabilidad y rechazo a las perturbaciones [Kuantama, 2018]. Todos estos ejemplos de aplicación del control LQR utilizan el modelo linealizado de los sistemas dinámicos a controlar, lo cual limita su rango de aplicación a un área local. El objetivo de este trabajo consiste en

proponer una modificación en la metodología del control LQR para lograr ampliar el área de aplicación de este control.

El documento se organiza como sigue. En la sección 2, se muestra la dinámica del carro péndulo invertido, se describe la metodología a seguir, y se explica la metodología propuesta. En la sección 3, se muestran los resultados obtenidos a fin de comparar el desempeño del sistema en lazo cerrado utilizando linealización y una equivalencia lineal. En la sección 4 se hace una discusión de los resultados obtenidos, y finalmente, en la sección 5 se establecen las conclusiones de este trabajo.

## 2. Métodos

### Sistema dinámico del carro péndulo

Los sistemas pendulares son mecanismos muy utilizados en sistemas de control automático para realizar análisis y diseño de controladores [Boubaker, 2013]. El estudio de este tipo de sistemas es importante, ya que algunos sistemas robóticos más complejos y de aplicación práctica, pueden ser representados a partir de sistemas pendulares. Un ejemplo de sistemas pendulares muy conocido es el carro péndulo, el cual está formado por una estructura móvil con desplazamiento horizontal de un grado de libertad, sobre la estructura del carro se monta un péndulo simple de un grado libertad, el sistema tiene un grado de actuación sobre el carrito [Trimpe, 2014], [Luhao, 2010].

El diagrama del carro péndulo que se describe en este trabajo se muestra en la figura 1, y su comportamiento dinámico viene dado por las ecuaciones 1, 2 y 3.

$$(M + m \sin^2 \theta)\ddot{s} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + mg \sin \theta \cos \theta + f_c \dot{s} - u = 0 \quad (1)$$

$$(Ml + ml \sin^2 \theta)\ddot{\theta} - (M + m)g \sin \theta + \cos \theta u + f_p \dot{\theta} - ml \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 = 0 \quad (2)$$

$$y = [s \quad \dot{s} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T \quad (3)$$

Donde  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  y  $\ddot{\theta}$  corresponden al desplazamiento, velocidad y aceleración angular del péndulo;  $s$ ,  $\dot{s}$  y  $\ddot{s}$  representan la posición, velocidad y aceleración del carro; mientras que los parámetros del sistema dinámico están dados por  $M$ , que



corresponde a la masa del carro,  $m$  es la masa del péndulo,  $l$  representa la longitud al centro de masa del péndulo,  $f_c$  es el coeficiente de fricción del carro,  $f_p$  es el coeficiente de fricción del péndulo y  $g$  corresponde a la aceleración de la gravedad.

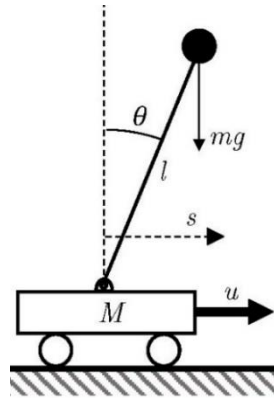


Figura 1 Diagrama del carro péndulo.

### Solución al problema de control óptimo no lineal

Consideramos el sistema dinámico de la ecuación 4.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + g(x(t), t)u(t) \quad (4)$$

Donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados del sistema,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control y  $f(x(t), t) \in \mathbb{R}^n$  y  $g(x(t), t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  son funciones continuas, y son continuamente diferenciables. Para este sistema se asocia el índice de desempeño, ecuación 5.

$$J(x(t), u(t), t) = N(x(\tau), \tau) + \int_{t_0}^{\tau} K(x(t), u(t), t) dt \quad (5)$$

Donde  $[t_0, \tau]$  corresponde al intervalo de tiempo de interés.  $N(\cdot)$  y  $K(\cdot)$  son funciones de ponderación.

El problema de control óptimo consiste en encontrar la entrada  $u^*(t)$  definida para el intervalo de tiempo  $[t_0, \tau]$  que logre que el sistema de ecuación 4 sobre la trayectoria particular  $x^*(t)$  minimice la función del índice de desempeño de ecuación 5 y donde se obtiene la ecuación 6. Esto para una función  $\psi \in \mathbb{R}^p$ , la cual es una condición al problema con función del estado final fijo.

$$\psi(x(\tau), \tau) = 0 \quad (6)$$

Para este problema se debe tener en cuenta que la función de ponderación final  $N(\cdot)$  se quiere hacer pequeña, por otro lado,  $\psi(\cdot)$  es una función del estado final que se desea fijo e igual a cero.

Para resolver el problema de control óptimo para el caso de un sistema no lineal variante podemos utilizar multiplicadores de Lagrange, para el cual se define un multiplicador asociado  $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$  y un multiplicador asociado  $\nu \in \mathbb{R}^p$ . Se define entonces el Hamiltoniano [Jacknoon, 2017] de ecuación 7.

$$H(x(t), u(t), t) = K(x(t), u(t), t) + \lambda^T(f(x(t), t) + g(x(t), u(t), t)u(t)) \quad (7)$$

Y la ecuación de estado será entonces, ecuación 8.

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(\cdot) + g(\cdot)u, \text{ con } t \geq t_0 \quad (8)$$

Mientras que las ecuaciones de coestado serán, ecuación 9.

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial f^T}{\partial x} \lambda + \frac{\partial u^T g^T}{\partial x} \lambda + \frac{\partial K}{\partial x}, \quad t \leq t_f \quad (9)$$

Para lo cual se utiliza una condición estacionaria, ecuación 10.

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial u} + g\lambda \quad (10)$$

Y una condición de frontera  $x(t_0)$  dado la ecuación 11.

$$(N_x + \psi_x^T \nu - \lambda)^T|_{t_f} dx(t_f) + (N_t + \psi_t^T \nu + H)|_{t_f} d\tau = 0 \quad (11)$$

De lo anterior, se tiene que el problema de control depende de la solución de un problema de valor de frontera en dos puntos. Y en general este es un problema difícil de resolver, y es aún más complicado si se considera la naturaleza no lineal de las funciones  $f(\cdot)$  y  $g(\cdot)$ . Por ello, en este trabajo se hace una propuesta para resolver el problema del sistema no lineal partiendo de la formulación del sistema lineal y haciendo el planteamiento a partir de un sistema lineal variante en tiempo.

## Solución local

El problema de control óptimo en sistemas no lineales se simplifica cuando la solución se enfoca en una región local, esto requiere la linealización del sistema sobre un punto de operación dado  $(x = \bar{x}, u = \bar{u})$ . El sistema no lineal de la ecuación

4 bien puede ser representado como en ecuación 12. De ahí, se tiene que el sistema linealizado, aplicando el Jacobiano, estará definido por la ecuación 13

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} f_1(x(t), u(t)) \\ f_2(x(t), u(t)) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x(t), u(t)) \\ f_n(x(t), u(t)) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\dot{x}_L(t) = A(t)x_L(t) + B(t)u(t) \quad (13)$$

Donde las ecuaciones 14 y 15.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \quad (14)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial u_1} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \quad (15)$$

El planteamiento del problema de control óptimo para el caso local, parte del sistema lineal variante en tiempo, ecuaciones 16 y 17.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (16)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (17)$$

Donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  representa el vector de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  corresponde al vector de entradas y  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  es el vector de salidas, el cual corresponde a las mediciones

disponibles del sistema, y  $C$  es la matriz de salidas de dimensión  $p \times n$ . Para el sistema descrito, se considera un índice de desempeño, ecuación 18.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt \quad (18)$$

Donde  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$  son matrices, simétricas, constantes y definidas positivas. Este índice de desempeño es un caso particular del dado en ecuación 5, donde se consideran como objetivo el encontrar la entrada de control que minimice el error cuadrático de la trayectoria del sistema  $x(t)$  y el desvanecimiento cuadrático de la entrada de control  $u(t)$ .

La aplicación del control óptimo en el sistema dado consiste entonces en encontrar un controlador  $u = u^*$  que minimice el índice de desempeño  $J = J^*$ , y que a la vez estabilice el sistema lineal. El problema de control óptimo planteado, en este caso, también se le conoce como problema del regulador cuadrático lineal (LQR, *Linear Quadratic Regulator*) esto, por el índice de desempeño propuesto en ecuación 18. Para establecer una solución al problema descrito, suponemos la existencia de una solución a la ecuación diferencial, la ecuación 19.

$$\dot{P}(t) = A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)R^{-1}B^T(t)P(t) + Q \quad (19)$$

La cual se deriva de la ecuación diferencial de Riccati, y corresponde a una matriz simétrica semidefinida positiva. La condición inicial,  $P_0 = P(0)$ , para resolver la ecuación diferencial se obtiene de la solución de la ecuación algebraica de Riccati, ecuación 20.

$$A^T(0)P_0 + P_0A(0) - P_0B(0)R^{-1}B^T(0)P_0 + Q = 0 \quad (20)$$

Si el sistema dinámico considerado es un sistema lineal invariante en tiempo (LTI, *Linear Time Invariant*), entonces la solución a la ecuación diferencial de Riccati de la ecuación 19,  $P(t) = P_t$ , se reduce a la solución de la ecuación algebraica de Riccati dada en la ecuación 20, esto es, ecuación 21.

$$P_t = P_0 \quad (21)$$

Partiendo de la existencia de la solución de la ecuación diferencial de ecuación 16, se tiene que una solución al problema de control óptimo viene dada por la ley de control óptima, ecuación 22.

$$u^*(t) = K(t)x(t) \quad (22)$$

Donde la matriz de ganancias  $K(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  estará dada por la ecuación 23.

$$K(t) = -R^{-1}B^T P(t) \quad (23)$$

La solución del problema para una región local llevando a cabo la linealización correspondiente, resulta una aproximación, donde su eficacia está definida por la naturaleza de los términos no lineales del sistema dinámico.

### Solución propuesta

La solución al control óptimo para el caso lineal tiene como principal dificultad el resolver la ecuación diferencial de Riccati de la ecuación 19, esta dificultad resulta ser menor que resolver el problema de valor de frontera para un sistema no lineal. Además, en el caso lineal se desprecian las dinámicas no lineales que, aunque normalmente en menor grado, influyen en el comportamiento del sistema. La solución propuesta en este trabajo evita la linealización y parte del supuesto que se conoce el vector de estados  $x$  y, además se tiene que el sistema dinámico puede ser llevado a la forma equivalente lineal de la ecuación 24.

$$\dot{x}_E(t) = \tilde{A}(\chi(t), t)x_E(t) + \tilde{B}(\chi(t), t)u(t) \quad (24)$$

Donde  $\chi(t) \in \mathbb{R}^q$  corresponde a un vector de variaciones paramétricas definidas por los parámetros conocidos del sistema y de las variables de estado  $x(t)$ . De ahí que la ecuación 25.

$$\chi(t) = [\varphi_1(x(t), t) \quad \varphi_2(x(t), t) \quad \cdots \quad \varphi_q(x(t), t)] \quad (25)$$

Dado entonces que  $\chi(t)$  es conocido y tiene una dependencia del tiempo, podemos expresar a las matrices para  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  como la ecuación 26.

$$\tilde{A}(t) = \tilde{A}(\chi(t), t) \quad y \quad \tilde{B}(t) = \tilde{B}(\chi(t), t) \quad (26)$$

Esto de acuerdo con la dependencia temporal generalizada de  $\varphi(\cdot)$ . Para que el sistema no lineal pueda ser llevado a la forma de la ecuación 24 se debe cumplir que ecuación 27. Esta condición es necesaria para asegurar que el sistema en la forma linealizada sea una función continua.

$$f(0, t) = 0 \quad y \quad g(0, t) = 0 \quad (27)$$

Partiendo entonces de los supuestos dados, se tiene que es posible encontrar una solución al problema de control óptimo conociendo la representación del sistema en la forma de ecuación 24. Esto es, el control óptimo estará dado por la ecuación 22 y ecuación 23 siempre y cuando se encuentre una solución a la ecuación diferencial de Riccati, ecuación 19 y dada la condición inicial, ecuación 20.

### Estabilización del carro péndulo utilizando control óptimo

El objetivo de este trabajo es el diseño de un controlador óptimo partiendo del sistema dinámico no lineal para el carro péndulo descrito anteriormente, así como también la verificación del método propuesto mediante simulación. Para cumplir con el objetivo planteado se propone el uso de la metodología que se ilustra en la figura 2. Se parte de la dinámica del sistema, y se obtiene su representación no lineal en espacio de estados. Luego, se obtiene el sistema linealizado de la ecuación 13, utilizando ecuaciones 14 y 15, y también se obtiene el sistema lineal equivalente de ecuación 24 aplicando la ecuación 25 y ecuación 26. Partiendo de la representación lineal, se encuentra el controlador óptimo (LQR). Enseguida, en un escenario de simulación se implementa el sistema en lazo cerrado, donde se resuelven en línea las ecuaciones diferenciales de Riccati, y con esto se observa y analiza el desempeño del sistema, comparando los resultados al utilizar el sistema linealizado, ecuación 13 y el equivalente lineal, la ecuación 24.

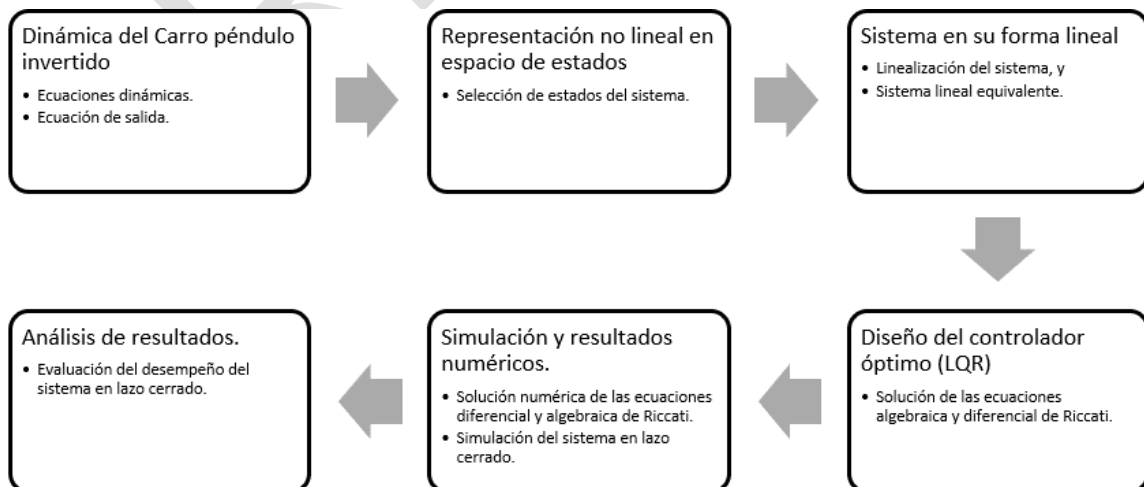


Figura 2 Metodología a seguir para el control del sistema carro péndulo invertido.

Para el sistema del carro péndulo invertido se eligen las variables de estado como en ecuación 28.

$$x^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4] = [s \quad \dot{s} \quad \theta \quad \dot{\theta}] \quad (28)$$

Por lo que la representación en espacio del sistema dinámico, considerando la ecuación 1 a ecuación 3 y ecuación 28, viene dada por la ecuación 29.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{ml \sin x_3 x_4^2 - mg \sin x_3 \cos x_3 - f_c x_2 + u}{M + m \sin^2 x_3} \\ x_4 \\ \frac{(M + m)g \sin x_3 - \cos x_3 u - f_p x_4 + ml \sin x_3 \cos x_3 x_4^2}{Ml + ml \sin^2 x_3} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$y = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$$

El objetivo de control es mantener el péndulo en posición vertical hacia arriba, esto es, en su punto de equilibrio inestable, mientras que la posición del carrito se debe mantener el origen. Por tanto, la linealización del sistema se hace alrededor del origen, esto se representa en la ecuación 30.

$$\bar{x} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (30)$$

Aplicando ecuación 12 a ecuación 15 en la ecuación 29 se tendrá que el sistema linealizado del carro péndulo estará dado por las ecuaciones 31 y 32.

$$\dot{x}_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f_c}{M} & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & -\frac{f_p}{Ml} \end{bmatrix} x_L + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u \quad (31)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_L \quad (32)$$

Ahora, se propone un sistema equivalente lineal variante en tiempo, para ello, primero se define una función equivalente a la función seno, en este caso la ecuación 33.

$$\sin \theta = \theta \sin x \theta \quad (33)$$

Donde se tiene la ecuación 34.

$$\sin x \theta = \begin{cases} \frac{\sin \theta}{\theta} & \text{para } \theta \neq 0 \\ 1 & \text{para } \theta = 0 \end{cases} \quad (34)$$

Para encontrar una forma equivalente lineal variante en tiempo de ecuación 24, la cual no es única, se parte la ecuación 29 y utilizamos la ecuación 34, de lo cual se obtiene la ecuación 35.

$$\dot{x}_E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \varphi_4 & \varphi_5 \end{bmatrix} x_E + \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_6 \\ 0 \\ \varphi_7 \end{bmatrix} u \quad (35)$$

Donde

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{f_c}{M + m \sin^2 x_3} \\ \varphi_2 &= -\frac{mg \sin x_3 \cos x_3}{M + m \sin^2 x_3} \\ \varphi_3 &= \frac{ml \sin x_3 x_4}{M + m \sin^2 x_3} \\ \varphi_4 &= \frac{(M + m)g \sin x_3}{Ml + ml \sin^2 x_3} \\ \varphi_5 &= \frac{-f_p + ml \sin x_3 \cos x_3 x_4}{Ml + ml \sin^2 x_3} \\ \varphi_6 &= \frac{1}{M + m \sin^2 x_3} \\ \varphi_7 &= -\frac{\cos x_3}{Ml + ml \sin^2 x_3} \end{aligned}$$

De donde se tiene que:  $\chi(t) = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4 \ \varphi_5 \ \varphi_6 \ \varphi_7]$ , el cual es un vector que cumple con el criterio de continuidad, y además cumple con la condición de ecuación 27, y por tanto esta forma equivalente lineal puede ser utilizada para resolver el problema de control óptimo.

Con la obtención de los sistemas linealizado y equivalente lineal se tiene el planteamiento formal del problema de control óptimo de acuerdo con el método



descrito anteriormente. Para encontrar la solución al problema planteado partiendo del método propuesto es necesario resolver las ecuaciones de Riccati, ecuación 19 y ecuación 21. La solución de la ecuación algebraica de Riccati se puede realizar fuera de línea por su naturaleza constante, mientras que la ecuación diferencial de Riccati se realiza en línea.

Para continuar con la metodología, se hace uso de software que permita encontrar una solución numérica a las ecuaciones de Riccati, así como realizar la simulación del sistema para evaluar la eficacia del método propuesto, lo cual se muestra en la siguiente sección.

### 3. Resultados

La solución de las ecuaciones de Riccati, la implementación del controlador y la evaluación del desempeño del sistema en lazo cerrado se lleva a cabo mediante simulaciones. Para realizar las simulaciones se utilizó Simulink de Matlab versión R2016a, donde se aplicó el algoritmo ode4 (Runge-Kutta) con un tiempo de muestreo de paso fijo de 1 ms. En figura 3 se muestra el diagrama realizado para la obtención de resultados numéricos al implementar los controladores.

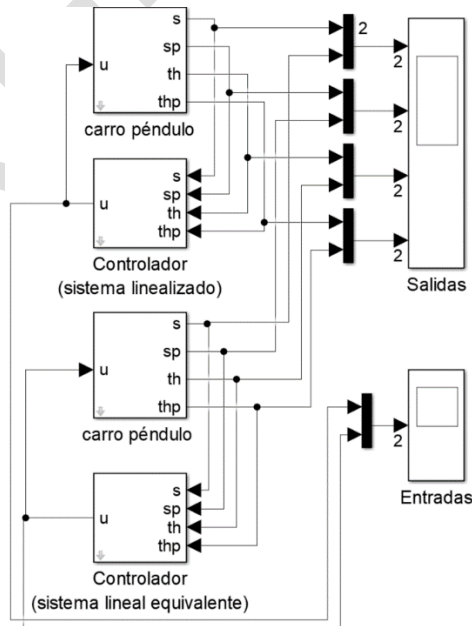


Figura 3 Metodología a seguir para el control del sistema carro péndulo invertido.

Los parámetros del carro péndulo que describen su comportamiento dinámico, ecuación 1, ecuación 2 utilizados en las simulaciones se muestran en la tabla 1.

Tabla 1 Parámetros utilizados para el carro péndulo invertido.

Parámetro	Descripción	Valor	Unidad
$M$	Masa del carro	0.769	kg
$m$	Masa del péndulo	0.421	kg
$l$	Longitud del péndulo al centro de masa	0.57	m
$f_c$	Coefficiente de fricción viscosa del carro	0.315	N · s/m
$f_p$	Coefficiente de fricción viscosa del péndulo	0.049	N · s
$g$	Aceleración de la gravedad	9.81	m/s <sup>2</sup>

Para la implementación del control, tanto del sistema linealizado como del sistema lineal equivalente, se utilizaron las siguientes matrices para definir los pesos en el índice de desempeño.

$$R = 1, \quad Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estas matrices definen el índice de desempeño para el control óptimo. Para  $\theta = x_3$ , se eligió darle un peso de  $Q_{33} = 100$ , el cual es el peso más alto de la matriz  $Q$ , ya que se considera importante la estabilización de posición angular del péndulo, mientras que para  $s = x_1$ , se eligió un valor de  $Q = 10$ , considerando un poco menos importante la estabilización de la posición del carro ( $s$ ).

La solución de la ecuación algebraica de Riccati no representa mayor problema, ya que es obtenida directamente al ejecutar una instrucción en Matlab, mientras que la solución de la ecuación diferencial de Riccati se resuelve en línea al resolver la ecuación diferencia que la representa. Teniendo resuelta las ecuaciones de Riccati, la señal de control se obtiene directamente de la ecuación 21 y ecuación 22. Y se simula entonces el sistema en lazo cerrado.

En la figura 4 se muestra el comportamiento de las salidas del sistema en lazo cerrado para una condición inicial del sistema en  $x(0) = [0 \quad 0 \quad \frac{\pi}{6} \quad 0]^T$ , esto es, para un valor inicial de  $\theta(0) = \frac{\pi}{6}$  rad. El comportamiento de la salida del sistema en

lazo cerrado muestra una ligera diferencia entre utilizar el sistema linealizado y el sistema equivalente lineal, se puede notar que el sistema equivalente lineal tiene un error ligeramente menor al que presenta el sistema linealizado. Mientras que la señal de entrada, mostrada en la figura 5, muestra también una similitud en los casos de los sistemas linealizado y equivalente lineal. Esto es de esperarse, ya que la dinámica del sistema linealizado es más similar al del sistema no lineal cuanto más cerca estemos del punto de operación sobre el que se realizó la linealización.

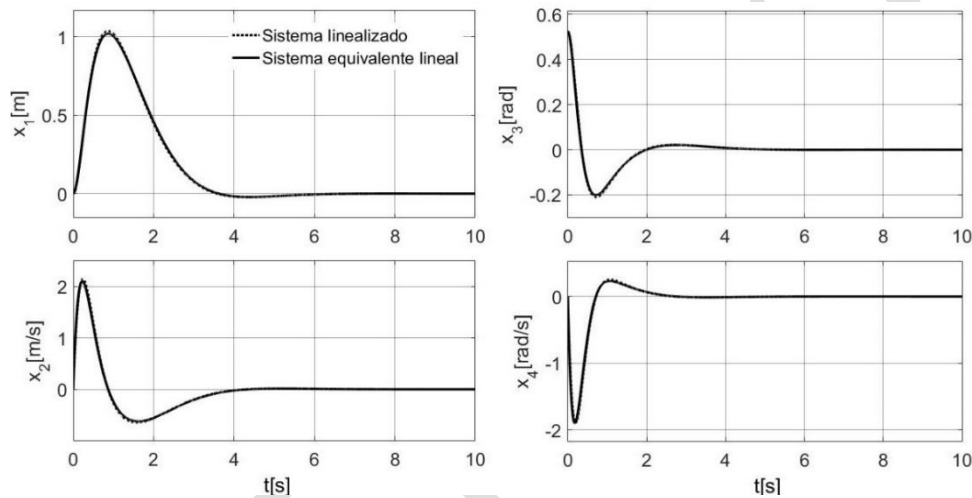


Figura 4 Comportamiento de las salidas del sistema en lazo cerrado para  $\theta(0) = \frac{\pi}{6}$ .

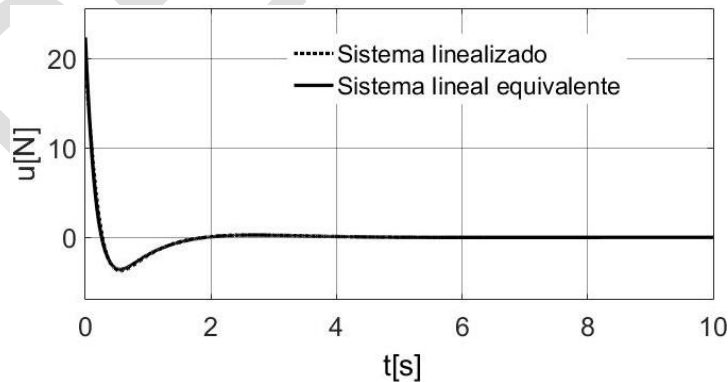


Figura 5 Comportamiento de la señal de entrada para  $\theta(0) = \frac{\pi}{6}$ .

Al realizar la simulación para una condición inicial en reposo con  $\theta(0) = \frac{5}{18}\pi$  se obtiene el comportamiento de las salidas de la figura 6, donde se observa una mayor

diferencia entre el comportamiento del sistema linealizado y el sistema lineal equivalente en comparación de cuando se tenía una condición inicial de  $\theta(0) = \frac{\pi}{6}$ . Se observa que el sistema equivalente muestra un error menor que el sistema linealizado, así mismo, en la figura 7, la señal de control muestra un menor esfuerzo para el sistema equivalente. En este caso, la condición inicial se aleja de la región local sobre la que se realizó la linealización, y el sistema linealizado presente mayores diferencias con respecto al sistema no lineal.

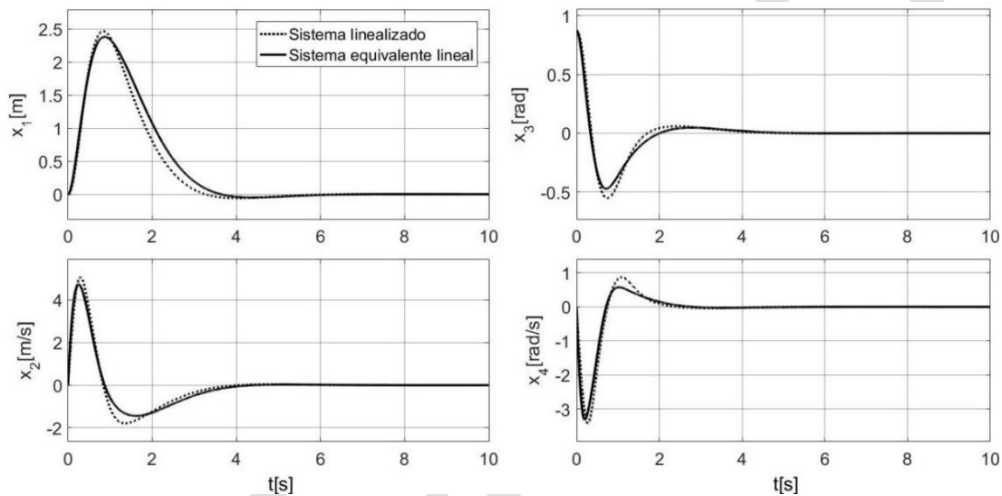


Figura 6 Comportamiento de las salidas del sistema en lazo cerrado para  $\theta(0) = \frac{5\pi}{18}$ .

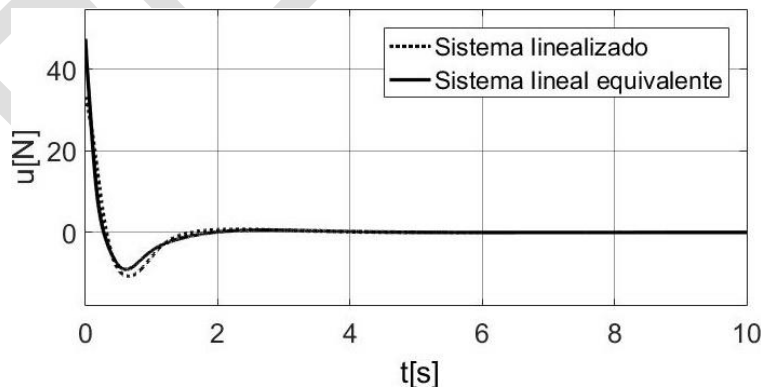


Figura 7 Comportamiento de la señal de entrada para  $\theta(0) = \frac{5\pi}{18}$ .

Vemos ahora en la figura 8 el comportamiento de las salidas  $x_1$  y  $x_3$  para una condición inicial de  $\theta(0) = \frac{7}{18}\pi$ . Se observa que, para el sistema linealizado, no se

realiza el control, el sistema en lazo cerrado se vuelve inestable, esto debido a las diferencias significativas del sistema linealizado con el sistema no lineal. Por otro lado, el sistema equivalente logra realizar el control, estabilizando el sistema sin ningún problema, aunque esto requiere un desplazamiento significativo del carro. La señal de control de la figura 9 muestra que, para lograr estabilizar el sistema, el esfuerzo es mayor que los casos mostrados anteriormente, esto debido a que el péndulo se encuentra en una posición cercana a la horizontal.

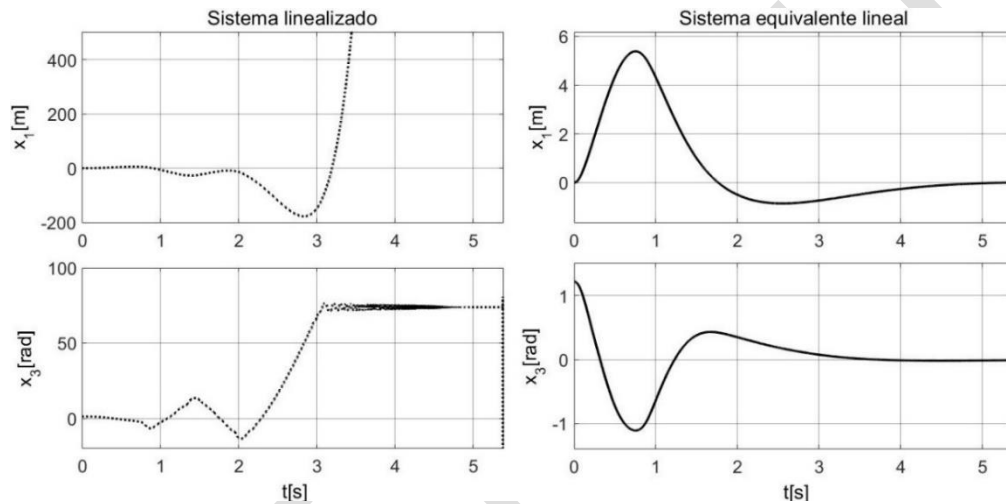


Figura 8 Comportamiento de las salidas del sistema en lazo cerrado para  $\theta(0) = \frac{5\pi}{18}$ .

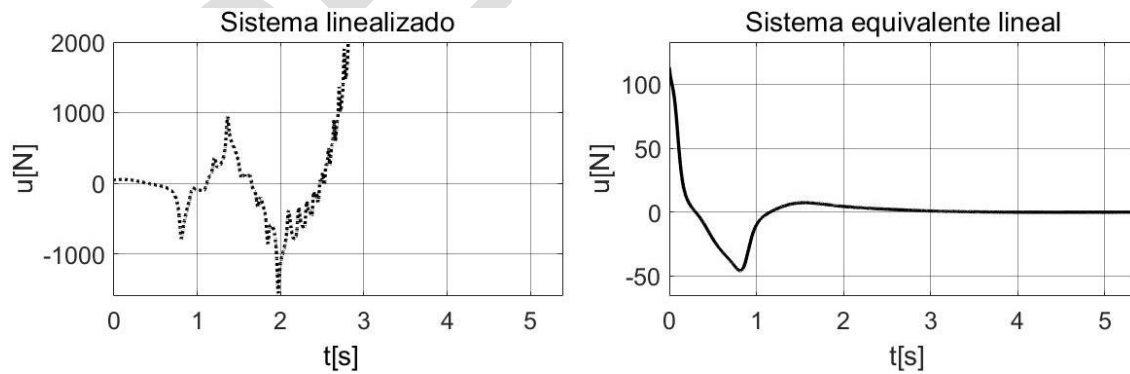


Figura 9 Comportamiento de la señal de entrada para  $\theta(0) = \frac{5\pi}{18}$ .

Ahora, se analiza más detalladamente el comportamiento del sistema en lazo cerrado, para una condición inicial de  $\theta(0) = \frac{1}{3}\pi$ , el comportamiento de las salidas

se muestra en la figura 10, y el comportamiento de la entrada se observa en la figura 11. Al observar las gráficas podríamos concluir que el sistema equivalente lineal muestra un mejor comportamiento que el sistema linealizado, esto, por el comportamiento más suave del sistema, sin embargo, esta apreciación resulta un tanto subjetiva.

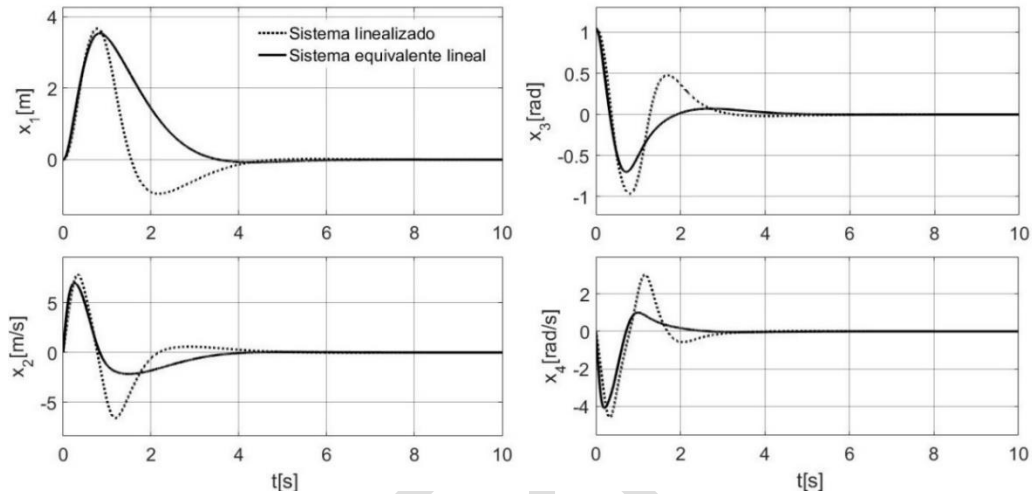


Figura 10 Comportamiento de las salidas del sistema en lazo cerrado para  $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$ .

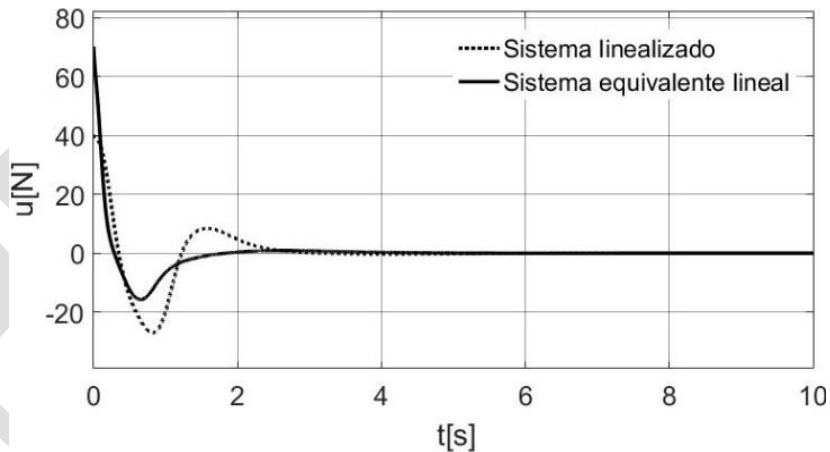


Figura 11 Comportamiento de la señal de entrada para  $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$ .

Para comparar el comportamiento del sistema, podemos utilizar el índice de desempeño ecuación 18, de lo cual resulta el gráfico dado en la figura 12, donde se aprecia que el sistema equivalente lineal tiene un desempeño superior al sistema

linealizado. Este mejor desempeño se debe a que las ganancias ( $K = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$ ) del controlador son dependientes de las salidas del sistema para el sistema equivalente lineal, mientras que, para el sistema linealizado, las ganancias se mantienen constantes. El comportamiento de las ganancias para el sistema lineal equivalente se muestra en la figura 13, donde el valor estacionario de las ganancias corresponde a las ganancias del sistema linealizado. La variación de las ganancias para el sistema equivalente lineal se debe a que la solución de la ecuación diferencial de Riccati tiene como resultado una matriz  $P$  que resulta variante en el tiempo y depende de las salidas del sistema, mientras que, en el caso del sistema linealizado, la matriz  $P$  resulta ser constante.

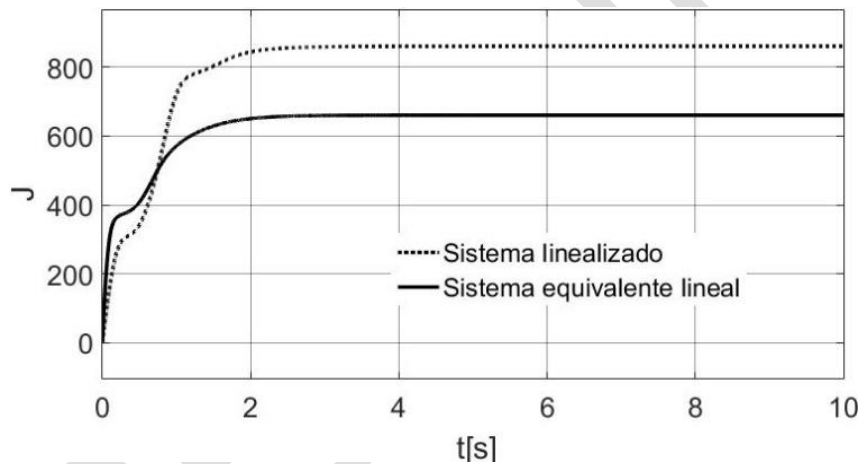


Figura 12 Comportamiento del índice de desempeño ( $J$ ) para  $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$ .

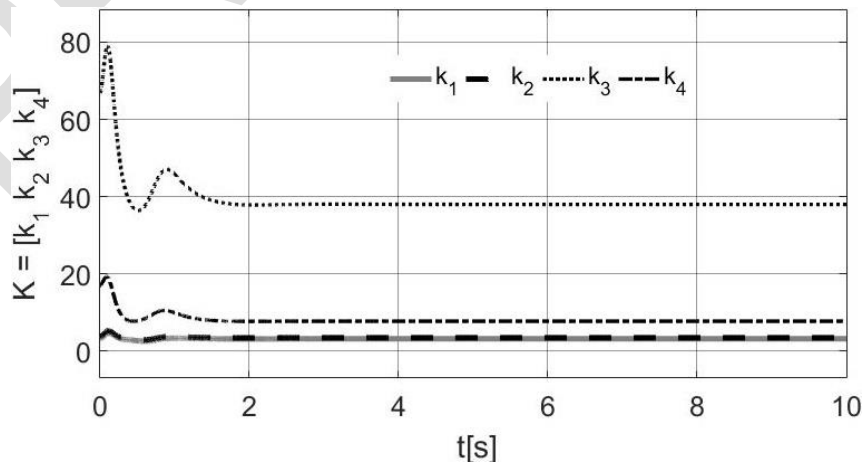


Figura 13 Comportamiento de las ganancias para  $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$ .

La figura 14 muestra el comportamiento de los elementos de la matriz  $P$  obtenida de la solución de la ecuación diferencial de Riccati para el sistema equivalente lineal.

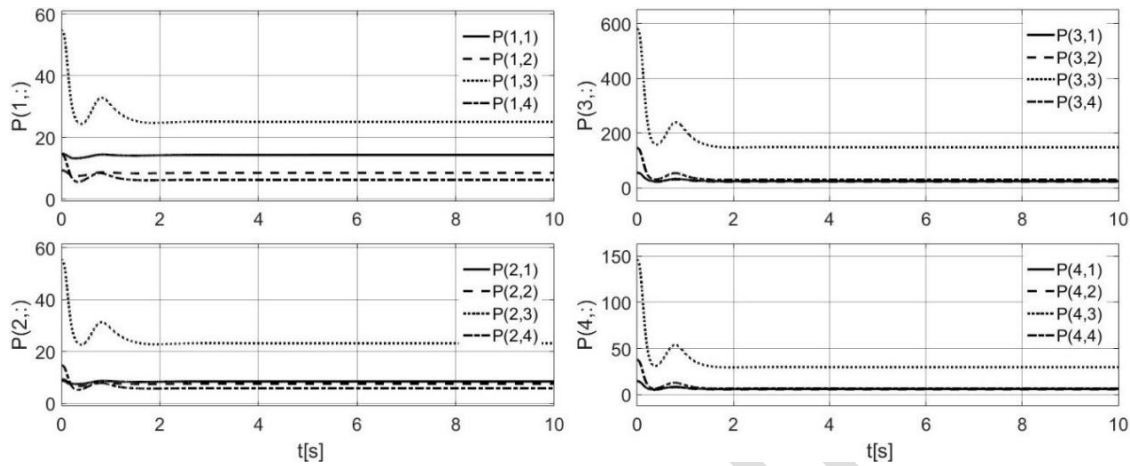


Figura 14 Comportamiento de los elementos de la matriz  $P$  para  $\theta(0) = \frac{\pi}{3}$ .

#### 4. Discusión

Los resultados obtenidos muestran que el comportamiento del sistema en lazo cerrado para el sistema linealizado es muy similar al del sistema equivalente lineal cuando la trayectoria del sistema se encuentra cerca del punto de operación donde se hizo la linealización, ver figuras 4 y 5. Esto porque las dinámicas no lineales del sistema tienen una influencia menor cuando la trayectoria del sistema dinámico se encuentra en una región local alrededor del punto de linealización. Conforme las trayectorias del sistema se alejan del punto de linealización, el controlador, diseñado a partir del sistema linealizado, se vuelve menos eficiente hasta llegar al punto donde el sistema en lazo cerrado muestra un comportamiento inestable, figuras 8 y 9. Esto corresponde a un comportamiento esperado, ya que la linealización es útil solo en una región local.

Por otro lado, el controlador, diseñado a partir del sistema equivalente lineal, muestra un mejor comportamiento cuando las trayectorias del sistema se alejan del punto de linealización, ver figuras 6 y 7. Esto se debe porque el controlador se diseña tomando en cuenta el comportamiento no lineal del sistema, de tal forma que las ganancias del controlador muestran un comportamiento variante en tiempo que



depende de la trayectoria del sistema. En la figura 13, se observa que las ganancias aumentan cuando la trayectoria del sistema se aleja del punto de linealización. Esto último se debe a que las dinámicas no lineales tienen un efecto mayor conforme nos alejamos del punto de linealización. La variación en las ganancias de la ecuación 22 se debe a su dependencia de la solución de la ecuación diferencial de Riccati, ecuación 19. Para el caso del sistema linealizado, las ganancias del controlador son constantes, esto debido a que se considera una ecuación algebraica de Riccati, ecuación 20. La figura 14 muestra la evolución de la solución de la ecuación diferencial de Riccati, la cual en su estado estable corresponde a la solución algebraica de Riccati. El transitorio que se observa en la solución de las ecuaciones de Riccati son debidas al comportamiento intrínseco del sistema no lineal.

Al observar directamente las gráficas del comportamiento de las salidas y de la entrada, se podría concluir que el sistema equivalente lineal muestra un mejor comportamiento que el sistema linealizado. Sin embargo, esta sería una conclusión un tanto subjetiva. Pero, si se compara la evolución del índice desempeño se puede establecer objetivamente que el sistema equivalente lineal ofrece un desempeño superior al sistema linealizado.

## **5. Conclusiones**

Se propuso una metodología para aplicar el control LQR utilizando un sistema equivalente lineal, lo cual evita la linealización del sistema. La metodología se aplicó a un sistema carro péndulo invertido, donde se simuló el sistema en lazo cerrado y se comparó su comportamiento con el caso donde se aplica la linealización del sistema.

Los resultados muestran que al utilizar el sistema equivalente lineal se amplía la región de aplicación del controlador LQR, y el índice de desempeño definido por el control LQR es mejor que en el caso de la aplicación del sistema linealizado. Esto es posible ya que las ganancias del controlador dependen de la solución de la ecuación diferencial de Riccati, que en el caso del sistema equivalente lineal toma en cuenta las dinámicas no lineales del sistema. Como trabajo futuro, se espera comprobar el resultado en una plataforma experimental en un ambiente real.

## 6. Bibliografía y Referencias

- [1] Angkeaw, K., Pongyart, W., y Prommee, P., Design and Implementation of FPA based LQR Controller for Magnetic Levitation Control System. 2019, 42nd International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP), pp. 411-414. 2019.
- [2] Boubaker, O., The inverted pendulum benchmark in nonlinear control theory: a survey, *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2013.
- [3] Engin, M., Embedded LQR controller design for self-balancing robot. 2018 7th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO), pp. 1-4. 2018.
- [4] Habib, M. K., y Avankoso, S. A., Modeling and Control of a Double Inverted Pendulum using LQR with Parameter Optimization through GA and PSO, 2020 21st International Conference on Research and Education in Mechatronics (REM), pp. 1-6, 2020.
- [5] Jacknoon, A. y Abido, M. A., Ant Colony based LQR and PID tuned parameters for controlling Inverted Pendulum, 2017 International Conference on Communication, Control, Computing and Electronics Engineering (ICCCCEE), pp. 1-8. 2017.
- [6] Kuantama, E., Tarca, I., y Tarca, R., Feedback Linearization LQR Control for Quadcopter Position Tracking. 2018 5th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), pp. 204-209. 2018.
- [7] Li, W., Ding, H. y Cheng, K., An investigation on the design and performance assessment of double-PID and LQR controllers for the inverted pendulum, *Proceedings of 2012 UKACC International Conference on Control*, pp. 190-196, 2012.
- [8] Luhao, W. y Zhanshi, S., LQR-Fuzzy Control for Double Inverted Pendulum. 2010 International Conference on Digital Manufacturing & Automation, pp. 900-903, 2010.
- [9] Lustosa, L. R., Cardoso Ribeiro, F., Defaÿ, F., y Moschetta, J. M., A new look at the uncontrollable linearized quaternion dynamics with implications to LQR design in underactuated systems. 2018 European Control Conference (ECC), pp. 3120-3125. 2018.

- [10] Morales, S., Magallanes, J., Delgado, C., y Canahuire, R., LQR Trajectory Tracking Control of an Omnidirectional Wheeled Mobile Robot. 2018 IEEE 2nd Colombian Conference on Robotics and Automation (CCRA), pp. 1-5. 2018.
- [11] Nasir, A. N. K., Ahmad, M. A., Rahmat, M. F., Performance comparison between LQR and PID Controllers for an inverted pendulum system. AIP Conference Proceedings, Vol. 1052, No. 1, 2008.
- [12] Prasad, L. B., Tyagi B. y Gupta, H. O., Modelling and Simulation for Optimal Control of Nonlinear Inverted Pendulum Dynamical System Using PID Controller and LQR, 2012 Sixth Asia Modelling Symposium, pp. 138-143, 2012.
- [13] Trimpe, S., Millane, A., Doessegger, S. y D'Andrea, R., A Self-Tuning LQR Approach Demonstrated on an Inverted Pendulum, IFAC Proceedings Volumes, Vol. 47, No. 3, pp. 11281-11287, 2014.
- [14] Vinodh Kumar, E. y Jerome, J., Robust LQR Controller Design for Stabilizing and Trajectory Tracking of Inverted Pendulum, Procedia Engineering, Vol. 64, pp. 169-178, 2013.
- [15] Wang, H., Dong, H., He, L., Shi, Y. y Zhang, Y., Design and Simulation of LQR Controller with the Linear Inverted Pendulum, 2010 International Conference on Electrical and Control Engineering, pp. 699-702, 2010.
- [16] Xiong, X., Wan, Z., The simulation of double inverted pendulum control based on particle swarm optimization LQR algorithm, 2010 IEEE International Conference on Software Engineering and Service Sciences, pp. 253-256, 2010.
- [17] Xu, J.-X., Lim, J. L., Mamun, A., Guo, Z.-Q., y Lee, T. H., An optimal linear controller design for an underactuated unicycle. IECON 2011 - 37th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, pp. 4266-4271. 2011.