

# ABSTRACCIÓN Y TRANSFERENCIA DEL CONCEPTO DE VARIACIÓN EN DISTINTOS CONTEXTOS Y REPRESENTACIONES.

Juan Ernesto Chávez Prieto<sup>1</sup>, Bárbara Alexandra Anaya Sánchez<sup>1</sup>, Juan Ernesto Chávez Pierce<sup>1</sup> y David Francisco Gardea Medrano<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad Autónoma de Ciudad Juárez,  
Avenida del Charro s/n C. Henry Dunant  
*juan.chavez@uacj.mx*

**Resumen:** La presente investigación tiene como finalidad analizar los niveles de abstracción en el estudiante en situaciones que involucran un pensamiento variacional. Esta investigación se llevó a cabo dentro de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez con un grupo que cursa la materia de Física II con el propósito de explorar como la articulación entre los sistemas de representación y distintos subcontextos puede ser una herramienta para favorecer el desarrollo de los niveles de abstracción matemática. Para esto, se diseñaron y administraron una serie de actividades basadas en la variación de diferentes funciones (cuadráticas, lineales y constantes), además de una tabla de relación en donde el estudiante transite y transfiera conocimientos entre distintos contextos y sistemas de representación. Las observaciones muestran que entre mayor sea el grado de abstracción y el número de subcontextos que pueda abordar de forma correcta un estudiante, mayor será el desarrollo de sus niveles de abstracción.

**Palabras clave:** Niveles de abstracción, contextos, sistemas de representación, visualización, recursos didácticos.

**Abstract:** The present research aims to analyze the levels of abstraction in the student in situations that involve variational thinking. This research was apply within the universidad Autónoma de Ciudad Juárez, with a group that is studying Physics II, with the purpose of exploring how the articulation between representation systems and different subcontext can be a tool to favor the development of the levels oh mathematical abstraction. For this, a series of activities based on the variation of different functions (quadratic, linear and constant) were designed and administered a serie of activities, in addition to a relation table where the student transit and transfers knowledge between different contexts and representation systems. The observations that show that the higher the degree of abstraction and the number of subcontext that a student can resolved correctly, the greater the development of their levels of abstraction.

**Keywords:** Levels of abstraction, contexts, representation systems, visualization, teaching resources.

## 1. Introducción

La mayoría de las investigaciones en matemática educativa han encontrado diversos problemas de entendimiento de los objetos y conceptos matemáticos. Uno de estos problemas de aprendizaje se relaciona con el manejo de diversos registros de representación en distintos contextos y subcontextos (Pecharroman, 2014). Los estudiantes muestran problemas relacionados con una falta de versatilidad en los cambios de representación. Una de las posibles causas es la enseñanza tradicional. Este tipo de instrucción se caracteriza por: 1) Un sistema de comunicación unidireccional maestro-alumno, 2) Uso de problemas de libro de texto, 3) Falta de contextualización de las situaciones de aprendizaje, 4) Bajo desarrollo del nivel de abstracción de los elementos de conocimiento que modelan los conceptos matemáticos, y 5) Una propuesta didáctica con situaciones de aprendizaje fundamentadas en una sola representación (Flores et. al. 2009). Otra posible causa es la poca importancia que se da en niveles básicos de educación a los registros como la base para leer e interpretar un objeto matemático, tal y como se hace por ejemplo con el manejo de las palabras y las imágenes, donde se intenta que el niño aprenda a leer, comprender y comunicar algún suceso de forma escrita y oral.

Este artículo presenta un estudio del desarrollo del nivel de abstracción matemática en el desarrollo del pensamiento variacional por parte de los estudiantes. La situación de aprendizaje se fundamenta en el desarrollo cognitivo de diversos subcontextos matemáticos y físicos a través del uso de distintas representaciones. Además, se explora el nivel de abstracción como un producto de la relación entre el número de estos subcontextos utilizados y el manejo de distintos registros de representación en los contextos matemático y físico.

## **2. Problema de investigación**

En la enseñanza de las matemáticas se pueden implementar actividades en donde el estudiante pueda auxiliarse de elementos simbólicos, gráficos y pictóricos en distintos contextos. Esto con el fin de que el estudiante se acerque a la aprehensión significativa de un objeto matemático. Sin embargo, pareciera que este recurso no ha sido explotado de forma correcta, por lo que en muchas ocasiones el estudiante solo recurre a una sola representación, intenta brincar de forma inmediata a las representaciones más abstractas, solo hace cambios de representación en una sola dirección o se queda anclado en un solo contexto matemático sin buscar cambiar a uno quizás más sencillo. Lo anterior suele generar confusión, generando que el estudiante pierda motivación por la actividad y la abandone. Partir de situaciones en diversos contextos físicos a través de actividades en donde el estudiante transite entre los distintos sistemas de representación de un concepto matemático puede facilitar la forma de adquirir y proporcionar variados significados matemáticos; “Es aquí donde la manera que se tiene de construir un conocimiento se encuentra ligada con su aplicación. De manera que el estudiante se apropie de dicho conocimiento tanto en el proceso de su generación como en la formalización del mismo” (Flores et. al. 2009).

Esta investigación se fundamenta en un marco conceptual sustentado en los sistemas de representación en distintos contextos y la visualización. Dichas teorías son una herramienta para la exploración de los niveles de abstracción desarrollados por el estudiante en fenómenos de variación. En este sentido, son muchas y variadas las posturas teóricas que han intentado abordar, analizar y explicar como el estudiante genera la construcción de conocimientos y que secuencias didácticas son las más adecuadas para ello.

En la matemática educativa se ha fortalecido la postura de que el aprendizaje de conceptos matemáticos se ve favorecido cuando se incorporan secuencias didácticas donde se utilizan y coordinan diversos sistemas de representación (Castro, 2017). Por otra parte, Duval (1993) afirma que la construcción de un concepto matemático está relacionada con la capacidad de ligar sus registros de representación, ya que el funcionamiento cognitivo del pensamiento humano depende de la existencia de al menos dos registros de representación. Además, sostiene que los registros de representación semiótica deben permitir tres actividades cognitivas fundamentales:

- La formación de una representación.
- El tratamiento de una representación.
- La conversión de una representación.

Por otro lado, la teoría de la visualización en el proceso de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es de gran importancia, sobre todo con los conceptos que requieren mayor nivel de abstracción por parte del estudiante. Es una herramienta para invocar e interpretar sistemas de representación, además de facilitar un entendimiento significativo de conceptos matemáticos. La noción de visualización está fuertemente ligada a la capacidad para la formación de imágenes mentales. Lo que caracteriza a una imagen mental es hacer posible la evocación de un objeto sin que él mismo esté directamente presente (Castro,1997). Hay que señalar que no se puede

entender la visualización como un simple acto de contemplar una situación, ya que se puede realizar la visualización inclusive sin haber mirado o haber estado frente a dicha situación. “En un sentido más amplio, entendemos que la visualización es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que se aprende”. (Cantoral y Montiel, 2003)

### 3. Metodología e instrumentos de análisis

Esta etapa de la investigación se desarrolló en el Instituto de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. En esta investigación participaron 17 estudiantes de la materia Física II. Las edades de los estudiantes de ambos grupos oscilan en su mayoría entre los 18 y 22 años. Para el desarrollo de esta investigación, se diseñaron y administraron dos secuencias didácticas, la primera basada en el concepto de variación a través de subcontextos matemáticos en distintos registros de representación, mientras que la segunda en el concepto de variación a través de subcontextos físicos en distintos registros de representación. Ambas secuencias didácticas fueron realizadas a través de tablas de relación. En la actividad, se les pidió a los estudiantes de ambas sesiones completar los espacios disponibles en cada tabla, las cuales contienen algunas situaciones de *la variación y el cambio* a través de distintos contextos. Este elemento de control cognitivo pretendió que el estudiante fuera capaz de explorar distintos registros (lenguaje natural, pictórico, gráfico, numérico y analítico) a través de distintos subcontextos. En una primera instancia el estudiante debió transitar por los distintos registros dentro de un mismo subcontexto, posteriormente por el mismo registro en distintos subcontextos y finalmente en distintas representaciones y distintos subcontextos. En la figura 1 se presenta un extracto de las tablas de relación registro-subcontexto utilizadas en la investigación.

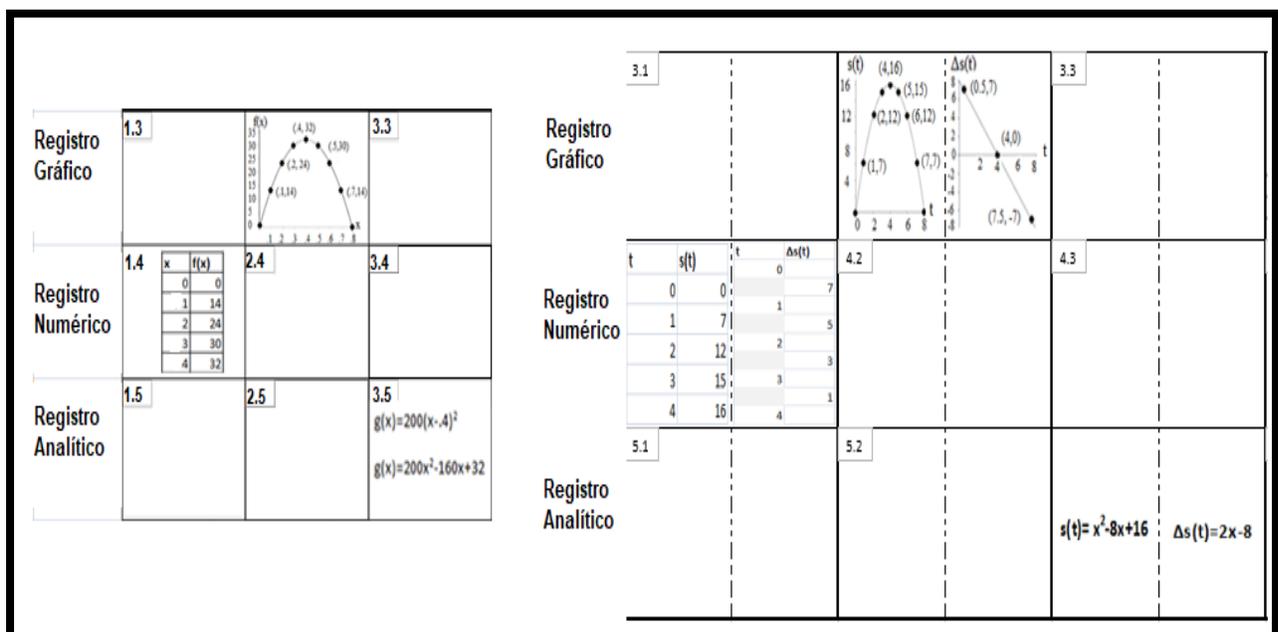


Figura 1. Extractos de las Tablas de relación registro-subcontexto.

#### 4. Discusión de resultados obtenidos y análisis correspondiente

El inicio para reconocer los niveles de abstracción será observando en las *tablas de relación registro-subcontexto*, cuantos subcontextos y registros puede manipular el estudiante. Se considera que el nivel de abstracción en el estudiante aumenta conforme los registros por los que transita van de lo concreto a lo abstracto y entre más subcontextos es capaz de manejar. Se analizarán cuatro aspectos en el llenado de las tablas de relación.

- Número de registros por subcontexto.
- Número de subcontextos por registro.
- Mayor grado de registro por subcontexto, al cual Días (2007) y Silvia (2009) se refieren como *mayor nivel de abstracción*.
- Mayor grado de registro y mayor número de  $R(r,s)$ 's. Se llama  $R(r,s)$ 's a los espacios de intersección entre registros y subcontextos.

En la figura 2 se muestra un ejemplo de cómo se realizará el análisis de datos de los resultados obtenidos en las tablas por cada estudiante. Los cuadros sombreados en la tabla representan una respuesta correcta, en estos el estudiante mostró evidencia de dominar el registro-subcontexto correspondiente. Las coordenadas muestran la información de cada uno de los aspectos a analizar con base a la información extraída de las tablas.

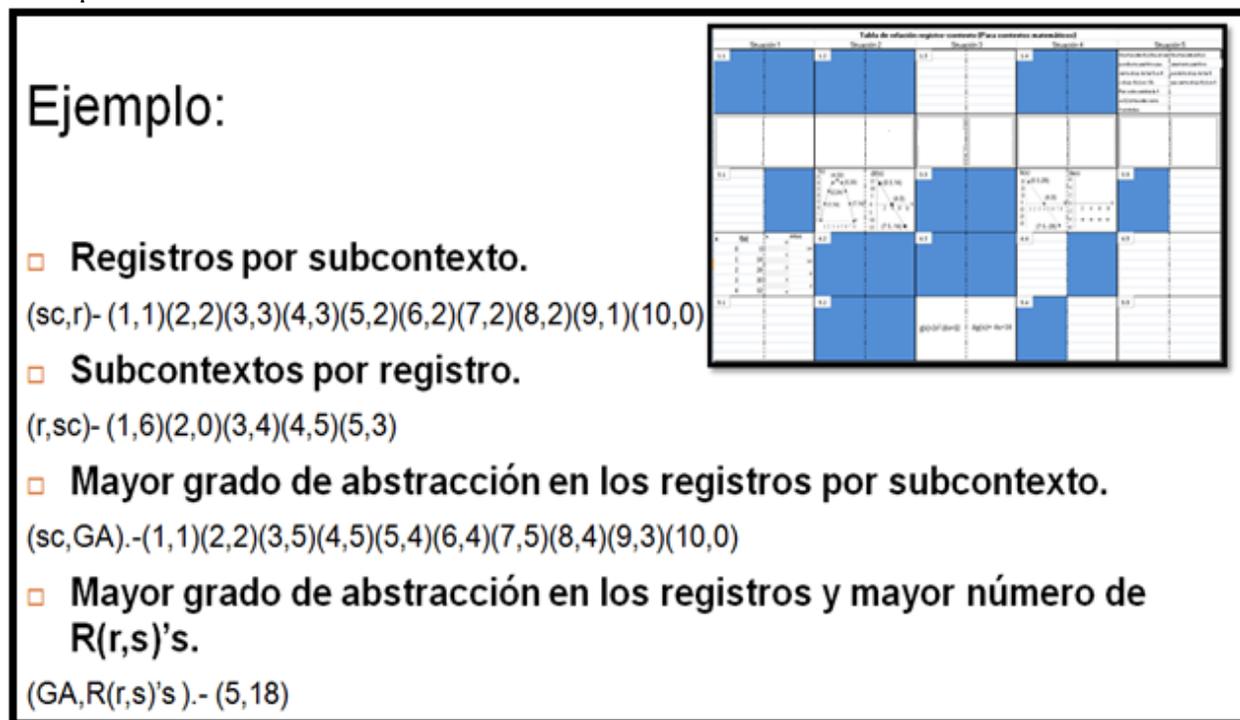


Figura 2. Estrategia utilizada para analizar los sistemas de representación en distintos subcontextos.

Después de obtener la relación entre el nivel abstracto de los registros y el número de  $R(r,s)$ 's por los que los estudiante fueron capaces de transitar, se intentara determinar el nivel de abstracción alcanzado por dichos estudiantes en los contextos matemático y físico a través del

modelo matemático mostrado en la figura 3. Esto con la intención de encontrar de forma cuantitativa un indicador numérico que describa cuál fue el nivel de abstracción logrado por cada uno de los estudiantes al momento de concluir su secuencia didáctica en la segunda etapa. Cabe señalar que este modelo matemático fue diseñado sólo con la intención de hacer más descriptivos los resultados obtenidos y están ajustados al diseño de esta investigación en particular.

$$\text{grado de abstracción en los registros} + \frac{1}{6} R(r,s)'s = \text{nivel de abstracción en Cont. Mat.}$$
$$\text{grado de abstracción en los registros} + \frac{1}{8} R(r,s)'s = \text{nivel de abstracción en Cont. Fís.}$$

Figura 3. Modelo matemático para obtener los niveles de abstracción matemática de cada estudiante.

#### 4.1 Número de registros por subcontexto.

En el análisis se observó que a excepción del subcontexto 5, son pocos los estudiantes que al trabajar en equipo lograron abordar tres registros distintos por subcontexto matemático, en promedio dominan sólo dos de ellos. En este sentido, los estudiantes E7, E10 y E11 llenaron correctamente los espacios de tres registros distintos en al menos tres subcontextos diferentes, siendo E10 el estudiante que consiguió un mayor número de registros, alcanzando tres registros diferentes en cada uno de nueve subcontextos matemáticos. El estudiante que menos registros alcanzó fue E16, con apenas un registro en un solo subcontexto matemático. En la tercera sesión se encontraron mejores resultados, ya que, en promedio, la mayoría de los estudiantes lograron abordar tres registros por subcontexto. El estudiante E7 consiguió mayor número de registros, alcanzando cuatro registros diferentes por subcontexto físico, mientras que al igual que en la sesión pasada, el estudiante E16 fue el que menos registros alcanzó.

#### 4.2 Número de subcontextos por registro.

En el análisis se observó que en la primera sesión pocos estudiantes abordaron alrededor de cuatro subcontextos matemáticos por registro. Los estudiantes E6, E7 y E10 alcanzaron mínimamente cuatro subcontextos matemáticos en al menos tres registros distintos, siendo E10 el estudiante que consigue mayor número de subcontextos en los distintos registros. El estudiante que menos registros alcanzó fue E16, con apenas un subcontexto matemático en un solo registro. En la tercera sesión se encontraron mejores resultados, ya que en promedio la mayoría de los estudiantes logran abordar entre cuatro y seis subcontextos por registro, siendo E7 y E10 los estudiantes que en promedio alcanzan mayor número de subcontextos por registro. Además, al igual que en la sesión pasada, es E16 el estudiante que menos subcontextos alcanzó.

#### 4.3 Mayor grado abstracto en los registros por subcontexto

En el análisis se observó que, en la primera sesión, en la mayoría de los subcontextos contenidos en la tabla de relación, el grado de abstracción al que menos lograron acceder los estudiantes es el correspondiente al registro analítico. El registro con mayor grado de abstracción alcanzado por la mayoría de los estudiantes es el que corresponde al registro numérico. Además, el estudiante que logró alcanzar mayor grado de abstracción en los registros por subcontexto matemático fue E10, quien en siete de los diez subcontextos matemáticos contenidos en la tabla consiguió llegar al registro con el grado de abstracción más alto (analítico). El estudiante E16 se

quedó con el grado de abstracción más bajo en los registros, ubicándose en el grado 0 en la mayoría de los subcontextos matemáticos. En la tercera sesión la mayoría de los estudiantes lograron acceder al menos en un subcontexto al registro con mayor grado de abstracción (registro analítico). Sin embargo, cerca de la mitad de los estudiantes no alcanzaron al menos un grado de abstracción en los subcontextos 9 y 10. Por otra parte, el estudiante que alcanzó mayor grado abstracto en los registros fue E7, quien en todos los subcontextos consiguió llegar al registro con el grado de abstracción más alto (registro analítico).

#### 4.4 Mayor grado de abstracción en los registros y número de $R(r,s)$ 's

En la primera sesión la mayoría de los estudiantes alcanzaron el grado 4 correspondiente al registro numérico, abarcando un promedio de ocho  $R(r,s)$ 's. Cerca de la tercera parte de los estudiantes alcanzaron el último grado correspondiente al registro analítico, abarcando un promedio de trece  $R(r,s)$ 's. Únicamente un estudiante se ubicó en el grado 1 correspondiente al registro verbal, alcanzando una sola  $R(r,s)$ 's. En la tercera sesión se observaron mejores resultados, ya que todos los estudiantes lograron el grado más alto correspondiente al registro analítico, además de cubrir en su mayoría cerca de la mitad de las  $R(r,s)$ 's contenidas en la tabla de relación. En las gráficas de dispersión de la figura 4 se observa que cuando el estudiante logra transitar por la mayoría de los diversas  $R(r,s)$ 's, también logra transitar por los sistemas de representación más complejos y viceversa. Esto se observa cuando el número de puntos tiende a incrementarse conforme estos se van acercando hacia la parte superior derecha de dichas gráficas de dispersión. En la primera sesión los valores eran cercanos entre sí, sin embargo, en la tercera sesión, los valores se dispersaron menos, por lo que pareciera que los estudiantes alcanzaron mayores grados de abstracción cuando estuvieron expuestos a la secuencia didáctica a través de un contexto físico. Posiblemente esto se deba a la estimulo y la manipulación continua de los subcontextos matemáticos, y los sistemas de representación manejados a lo largo de toda esta secuencia de aprendizaje para lograr una articulación de estos.

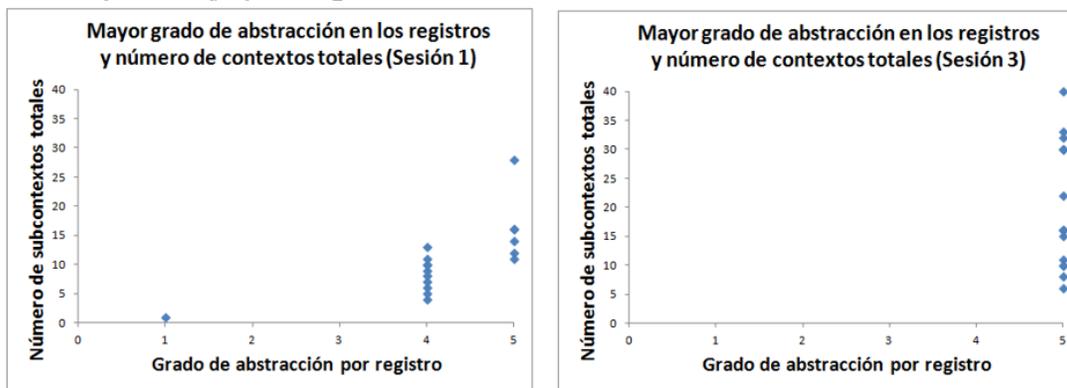


Figura 4. Mayor grado de abstracción en los registros y número de  $R(r,s)$ 's alcanzadas por los estudiantes

#### 4.5 Niveles de abstracción

Después de obtener la relación entre el grado de abstracción de los registros y el número de subcontextos por las que los estudiantes transitaban, se determinó el nivel de abstracción alcanzado por a través de los modelos matemáticos antes mencionados durante las sesiones uno y tres de esta etapa. Además, se analizó la media aritmética, la moda y la mediana de los valores

encontrados para sondear del nivel de abstracción del grupo. Los resultados de los niveles de abstracción matemática obtenidos en la primera y tercera sesión a través del modelo matemático son mostrados en la figura 5. En esta se observa que, para la primera sesión, los niveles de abstracción matemática alcanzados por los estudiantes van desde el 1.16 (estudiante E16) hasta el 9.66 (estudiante E10). En general, los valores obtenidos en base al modelo matemático para determinar el nivel de abstracción en cada estudiante muestran valores de bajos a altos, siendo el promedio de todos estos 6, además de tener una mediana de 5.66 y una moda de 5.66 y 7.66 (bimodal). Mientras tanto, para la tercera sesión se puede observar que los niveles de abstracción alcanzados por los estudiantes van desde 5.75 hasta 10. En general, los valores obtenidos en el modelo matemático para determinar el nivel de abstracción en cada estudiante muestran valores altos, alcanzado un promedio grupal de 7.5, así como una mediana y una moda de 7.

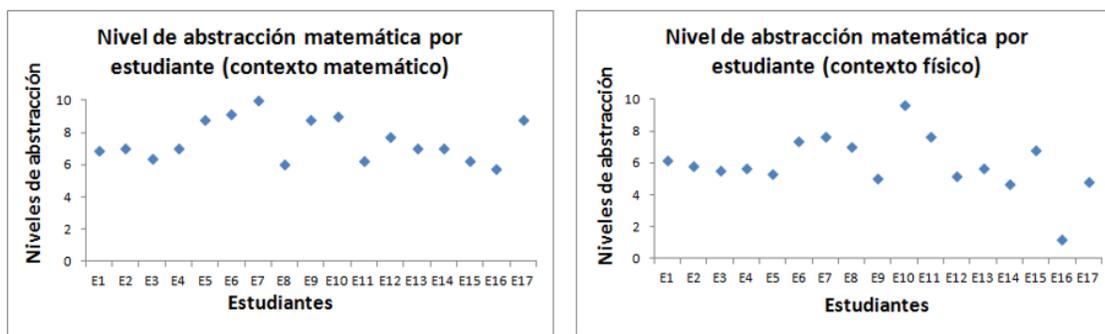


Figura 5. Gráfica de la media, mediana y moda de los niveles de abstracción matemática en los estudiantes del grupo de Física II

## 5. Conclusiones

A través de esta investigación se logró valorar la efectividad de una propuesta didáctica fundamentada en la articulación entre diversos registros de representación y subcontextos. Esta propuesta metodológica tenía la intención de estimular en el estudiante el desarrollo de los niveles de abstracción matemática en base al concepto de variación. Se esperaba que los estudiantes de Física II mostraran cierta versatilidad para el cambio de registro y subcontextos, tanto en un contexto matemático como en uno físico. Los resultados obtenidos en esta investigación muestran que los estudiantes explotaron gran parte de los recursos que tuvieron a su alcance de forma correcta, recurriendo al uso de diversas representaciones con distintos niveles de abstracción y realizando cambios de registros y de subcontextos en más de una dirección, lo que acercó a los estudiantes a un posible entendimiento significativo. Probablemente esto se debe a la estimulación y manipulación continua de los contextos físicos y matemáticos y los sistemas de representación manejados a lo largo de toda la secuencia didáctica para lograr una articulación de estos. Dado que los niveles de abstracción se incrementaron alrededor de un 20% de un contexto a otro, podríamos asumir que se cumple la idea principal planteada en esta investigación, la cual sostiene que entre mayor número de contextos logre transitar el estudiante y mayor grado de abstracción tengan los registros explorados, mayor nivel de abstracción habrá desarrollado el estudiante.

Si este tipo de estrategias fueran utilizadas correctamente durante los primeros años de la educación básica, el estudiante encontraría diversas vías para acceder al conocimiento

matemático desde una temprana edad, lo que posiblemente estimularía el desarrollo de sus capacidades para la interpretación y el análisis de los conceptos matemáticos, facilitando la comprensión de las situaciones cotidianas donde dichos conceptos se involucran y permitiendo aplicar los mismos en una amplia variedad de contextos. Por ello, es importante incluir gradualmente secuencias de enseñanza-aprendizaje en todos los niveles educativos en donde se pueda analizar y medir como el estudiante explora los objetos matemáticos, transfiere conocimientos y desarrolla sus niveles de abstracción a través de la conversión de registros de representación y el manejo de distintos contextos y subcontextos. Estas estrategias tienen que ser desarrolladas de tal forma que los estudiantes abran espacio a la reflexión y el razonamiento, logrando así una mejor resolución de las actividades y favoreciendo el desarrollo de habilidades cognitivas encaminadas a lograr un aprendizaje funcional.

Otro aspecto a destacar fue la manera en que se organizaron las actividades en la investigación, es decir, en distintas etapas en donde las actividades puedan resolverse en equipos y de forma grupal. Esto originó que el estudiante fomentara sus niveles de creatividad, logrando así generar nuevas ideas y razonamientos que lo lleven a reflexionar sobre el conocimiento adquirido.

## Referencias

Cantoral, Ricardo y Montiel, Gisela. (2003). Visualización y pensamiento matemático: El caso de los polinomios interpoladores de Lagrange. *Números*, Núm. 55, 3-6. ISSN#0212-3096.

Castro, Encarnación. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada: Editorial Comares, 1995. ISBN#8481512052.

Castro María, González María. y Flores Sergio. (2017). Registros de representación semiotica del concepto de función exponencial. *Entreciencias: diálogos en la sociedad del conocimiento*, 5(13), 1-12. ISSN#2007-8064.

Díaz Juan y Bernejo Vicente (2007). Nivel de abstracción en los problemas aritméticos en alumnos urbanos y rurales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(3), 335-364. ISSN#1665-2436.

Duval, Raymond. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM de Strasbourg*, 5, 37-65. ISSN#0987-7576.

Flores Sergio. Luna Juan. y Chávez Juan. (2008). El aprendizaje de la física y las matemáticas en contexto. *Cultura, ciencia y tecnología* 5(24), 19-24. ISSN#2007-0411.

Pecharroman, Cristina (2014), El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. *Educación matemática*, 11(5), 111-133. ISSN#1665-5826.

Silvia, Carla. (2009). Matemática, contextualización de sus contenidos. *Revista argentina de psicopedagogía*, 62, 11,14. ISSN#1514-5603.