Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

VOL. XI

AVANZA

Teoría de módulos y categorías

Gustavo Tapia
Luis Loeza
Francisco Ávila

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ

INSTITUTO DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

CUERPO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS PURAS
Y APLICADAS

AVANZA: Teoría de módulos y categorías

Vol. XI

Gustavo Tapia
Luis Loeza
Francisco Ávila

AVANZA: Teoría de módulos y categorías.
[Recurso electrónico] / Gustavo Tapia, Luis Loeza, Francisco Ávila. – Ciudad Juárez, Chihuahua: Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Cuerpo Académico de Matemáticas Puras y Aplicadas, 2021.
v.7 (159 páginas).

ISBN Colección: 978-607-922-452-3

Contenido: Módulos. – Introducción a la teoría de categorías. – Sumas y productos directos de módulos. – Producto tensorial. – Clases de módulos.

1. Módulos. – 2. Categorías. – 3. Operaciones de módulos. – 4. Tensores. –
5. Clases de módulos. – 6. Funtores. – 7. Sucesiones exactas. – 8. Pushouts y Pullbacks. –
9. Módulos libres. – 10. Módulos proyectivos.

QA159 A83 2021

Cuidado de la edición y diagramación: Luis Loeza Chin.
Corrección: Jorge Hernández Martínez.
Cubierta: Karla María Rascón González.

Av. Plutarco Elías Calles núm. 1210
Fovissste Chamizal, C.P. 32310
Ciudad Juárez, Chihuahua, México

Impreso en México / *Printed in Mexico*

Agradecemos a:

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

Instituto de Ingeniería y Tecnología

Departamento de Física y Matemáticas

Dirección General de Comunicación Universitaria

Coordinación General de Investigación y Posgrado

Contents

Presentación

Este libro se ha escrito con un doble propósito: en primer lugar, el de servir como un texto de introducción a la teoría de módulos desde un punto de vista categórico, lo que a su vez permita al lector iniciarse en temas de investigación actuales dentro del álgebra moderna, específicamente en las áreas de la teoría de anillos asociativos con identidad, así como en la teoría de módulos unitales, y en segundo lugar, el de servir como un texto de apoyo en cursos de álgebra moderna avanzada, que usualmente se imparten al final de una carrera de matemáticas.

El objetivo es el de proporcionar a los lectores un estudio amplio sobre aspectos elementales de la Teoría de Módulos, pero desde el punto de vista de la Teoría de Categorías. Así, se ha procurado ver todos los conceptos de módulos en el marco de categorías, con el fin de que los lectores tengan un panorama más amplio sobre la profundidad de los diferentes conceptos en la teoría de módulos.

El material está dividido en cinco capítulos procurando siempre una línea lógica para abordar cada tema. En el primer capítulo, se estudian los conceptos básicos de la teoría de módulos, desde su definición, ejemplos y propiedades elementales, incluyendo los resultados que son piedra fundamental de toda la teoría, como son el Teorema del Factor, los Teoremas de Isomorfismo de Noether, el Teorema de la Correspondencia y las Leyes Modulares. En el segundo capítulo, se hace una introducción a los conceptos de la teoría de categorías, como son la definición y ejemplos de distintas categorías, funtores, sucesiones exactas (cortas y las que se escinden) para concluir con funtores exactos izquierdos y derechos, donde el principal ejemplo que se estudia es el del funtor Hom. En el tercer capítulo, estudiamos las sumas y productos directos en módulos, sus propiedades universales, y la relación que guardan con el funtor Hom; finalizamos esta unidad con dos conceptos importantes como son los límites directos e inversos y como casos particulares de éstos, los pushouts y pullbacks. En el cuarto capítulo, estudiamos el importantísimo concepto de producto tensorial en módulos, la propiedad universal que lo caracteriza, así como sus propiedades funtoriales; este capítulo finaliza con el Teorema del Isomorfismo Adjunto, el cual resulta indispensable para demostrar algunos teoremas importantes en el último capítulo. Finalmente, en el quinto capítulo se estudian algunas clases especiales de módulos como son los módulos libres, proyectivos, inyectivos y semisimples, estableciendo las características primordiales de cada uno de ellos.

Finalmente hay que recalcar que en cada uno de los capítulos del libro, se han agregado al final de cada uno, una serie de ejercicios resueltos, en donde el lector puede apreciar algunos métodos de solución que se aplican en esta rama del álgebra moderna y que, por supuesto, le sirvan de inspiración para resolver sus propios problemas en el área.

Dr. Gustavo Tapia Sánchez
Dr. Luis Grabriel Loeza Chin
Dr. Francisco Ávila Álvarez

Enero 2021

CAPÍTULO

1

Módulos

En esta unidad estudiamos los conceptos básicos de la teoría general de módulos, estableciendo los principales teoremas como son el teorema del factor, los tres teoremas de isomorfismo, el teorema de la correspondencia y las leyes modulares.

De la misma forma que para definir un espacio vectorial se necesita un campo de escalares k, para establecer el concepto de módulo necesitamos un anillo asociativo con 1, el cual toma el papel del campo. A lo largo de todo este curso, R denotará un anillo asociativo con 1. Suponemos que el estudiante ha llevado previamente con éxito un curso de teoría de anillos.

1.1. Notación Funcional Izquierda y Derecha

Antes de dar el concepto de módulo, resulta conveniente establecer la notación funcional por la izquierda y por la derecha, la cual nos servirá más adelante para aclarar algunos detalles en la definición de módulo.

Definición 1.1. Sean A y B conjuntos, una función $f : A \longrightarrow B$ está en **notación funcional por la derecha**, si para cada $x \in A$ la imagen de x bajo f se denota por $xf \in B$, o en algunas ocasiones $(x)f \in B$. Dicho de otra manera, la función f está definida por la regla de correspondencia $x \mapsto xf$. Análogamente, decimos que f está en **notación funcional por la izquierda**, si $x \mapsto fx$, o bien $x \mapsto f(x)$, $\forall x \in A$.

Nótese que la notación funcional por la izquierda es la que tradicionalmente usamos desde nuestros cursos básicos de álgebra y cálculo, por lo que estamos más acostumbrados a manejar ésta.

Dependiendo de la notación que se maneje, la correspondiente para la composición de funciones queda determinada como sigue:

Definición 1.2. Si A, B y C son conjuntos, $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son funciones escritas en notación por la derecha, entonces se define la **composición** f seguida de g, como la función $fg : A \longrightarrow C$ dada por la regla $x \mapsto (xf)g$, $\forall x \in A$. Si se está usando la notación funcional por la izquierda, entonces la composición se escribe en la forma usual $gf : A \longrightarrow C$ y está dada por $x \mapsto g(fx)$, $\forall x \in A$.

En cualquiera de los dos casos, la composición es la única función que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

En donde se uso la notación funcional por la izquierda, ya que si se usa la notación funcional por la derecha, entonces el diagrama se escribe como sigue:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "fg"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

En general tenemos la siguiente:

Definición 1.3. Decimos que un diagrama de funciones, es un **diagrama conmutativo** si partiendo de cualquiera de los dominios en el diagrama, cualesquier dos trayectorias diferentes producen el mismo resultado.

Ejemplo 1.1. Si se asegura que el siguiente diagrama (con notación funcional por la derecha) es conmutativo,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\gamma"] \\ C \arrow[r, "\theta"'] & D \end{tikzcd}$$

entonces esto equivale a decir que $\beta\gamma = \alpha\theta$.

Es importante hacer notar que sea cual sea la notación funcional que se utilice, la composición de funciones tiene la siguiente propiedad:

Proposición 1.1. *La composición de funciones siempre es asociativa, es decir, si f y g están dadas como antes, y además tenemos otra función $h : C \longrightarrow D$, y usamos la notación por la derecha, entonces:*

$$f(gh) = (fg)h$$

Demostración. En efecto, si $x \in A$, por un lado se tiene que:

$$x[f(gh)] = xf(gh) = ((xf)g)h$$

Mientras que por el otro lado:

$$x[(fg)h] = (x(fg))h = ((xf)g)h$$

Es claro que en ambos casos se obtiene el mismo valor. □

En el resto del curso, usaremos la notación funcional por la derecha y por la izquierda indiscriminadamente, sin especificar su uso concreto, esperando que sea el contexto mismo el que aclare la notación usada.

1.2. Anillos de endomorfismos

A continuación vemos como a cada grupo abeliano aditivo M le podemos asociar un cierto anillo, llamado el anillo de endomorfismos de M, el cual es de importancia central para establecer el concepto de módulo. Esto se hace a través de los homomorfismos (de grupos) que a continuación definimos.

Definición 1.4. Si M y N son grupos abelianos aditivos, entonces una función $f : M \longrightarrow N$ se llama un **homomorfismo** si:

$$(x + y)f = xf + yf, \forall x, y \in M$$

Al conjunto de todos los homomorfismos de M en N lo denotaremos por $Hom(M, N)$.

Definición 1.5. Si $f, g \in Hom(M, N)$, entonces definimos la **suma de homomorfismos** como la función $f + g : M \longrightarrow N$ tal que:

$$x(f + g) = xf + xg, \forall x \in M.$$

Con esta definición es fácil ver que:

Proposición 1.2. *El conjunto $Hom(M, N)$ es un grupo abeliano aditivo bajo la suma de homomorfismos definida en 1.2.2.*

Demostración. En efecto, $f + g \in Hom(M, N)$ ya que:

$$(x + y)(f + g) = (x + y)f + (x + y)g = xf + yf + xg + yg = x(f + g) + y(f + g)$$

Además es fácil verificar que el elemento neutro es el homomorfismo nulo $0 : M \longrightarrow N$ definido como $x0 = 0, \forall x \in M$, y el inverso aditivo de $f \in Hom(M, N)$ es el homomorfismo $-f : M \longrightarrow N$ definido como $x(-f) = -(xf), \forall x \in M$. □

En el caso particular en que $M = N$, se acostumbra hablar de *endomorfismos* de M, en vez de homomorfismos de M en M, y se usa la notación:

$$End(M) := Hom(M, M)$$

En este caso, cualesquier par $\alpha, \beta \in End(M)$ pueden componerse entre sí y, por lo menos, obtener una función $\alpha\beta : M \to M$. Entonces se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.3. *Bajo la suma de endomorfismos y la composición como el producto, el conjunto $End(M)$ es un anillo asociativo con 1.*

Demostración. En efecto, $\alpha\beta \in End(M)$, ya que $\forall x, y \in M$ se tiene que:

$$(x + y)\alpha\beta = (x\alpha + y\alpha)\beta = (x\alpha)\beta + (y\alpha)\beta = x(\alpha\beta) + y(\alpha\beta).$$

Además vimos en la sección anterior que la composición es asociativa, y es fácil ver que la composición distribuye a la suma por ambos lados. Finalmente, el elemento unitario es el endomorfismo identidad $1_M : M \to M$. □

Esta proposición nos permite hacer la siguiente:

Definición 1.6. Dado un grupo abeliano aditivo M, si usamos la notación funcional por la derecha, definimos el **anillo de endomorfismos derechos de M** como el anillo de endomorfismos de M con las operaciones de suma de endomorfismos y el producto como la composición. Este anillo es denotado como $End^r(M)$.

Análogamente, si usamos la notación funcional por la izquierda, podemos definir el **anillo de endomorfismos izquierdos de M**, el cual se denota como $End^l(M)$.

Nótese que, ya que la composición de funciones en general no es conmutativa, entonces el anillo de endomorfismos derechos difiere del anillo de endomorfismos izquierdos. De hecho, uno es el *anillo opuesto* del otro, es decir, si $\alpha \cdot \beta$ denota el producto del anillo $End^r(M)$ y $\alpha * \beta$ denota el producto del anillo $End^l(M)$, entonces:

$$\alpha \cdot \beta = \beta * \alpha$$

Recordemos que en el estudio de la teoría de anillos, se prueba que un anillo R y su anillo opuesto R^* son *anti-isomorfos*, ya que existe un anti-isomorfismo de anillos $\phi : R \to R^*$ dado por $\phi(r) = r$.

De esta forma hemos asociado a cada grupo abeliano, un par de anillos de endomorfismos. Como veremos en la siguiente sección, existe una fuerte conexión entre estos anillos de endomorfismos de un grupo abeliano, y la estructura de R-módulo que se le pueda dar a M.

1.3. Módulos Izquierdos y Derechos

En el curso de Álgebra Lineal, se estudian espacios vectoriales sobre un campo k. El concepto de módulo es una generalización del de espacio vectorial, tomando los escalares sobre un anillo con 1 en lugar del campo k.

Definición 1.7. Sea R un anillo con 1, un **R-módulo derecho** es un sistema $(M, +, \cdot)$ tal que $(M, +)$ es un grupo abeliano aditivo, $\cdot : M \times R \to M$ es una función tal que $(x, r) \mapsto x \cdot r = xr \in M$ y tal que se cumplen las siguientes propiedades $\forall x, x_1, x_2 \in M, \forall r, r_1, r_2 \in R$:

(i) $(x_1 + x_2)r = x_1 r + x_2 r$.
(ii) $x(r_1 + r_2) = xr_1 + xr_2$.
(iii) $x(r_1 r_2) = (xr_1)r_2$.
(iv) $x1 = x$.

Ya que en el caso general R no es un campo, resulta lógico suponer que este hecho implicará la pérdida de algunos resultados conocidos del Álgebra Lineal, pero es precisamente esta restricción la que convierte en tema de interés la investigación de cuáles son aquellas propiedades que se preservan y cuáles no, y es en esta búsqueda que surgirán nuevos conceptos de distintos tipos de anillos y módulos para los cuales se tienen propiedades muy peculiares e interesantes.

De forma similar, tenemos el concepto de R-módulo izquierdo:

Definición 1.8. Sea R un anillo con 1, un **R-módulo izquierdo** es un sistema $(M, +, \cdot)$ tal que $(M, +)$ es un grupo abeliano aditivo, $\cdot : R \times M \to M$ es una función tal que $(r, x) \mapsto r \cdot x = rx \in M$ y tal que se cumplen las siguientes propiedades $\forall x, x_1, x_2 \in M, \forall r, r_1, r_2 \in R$:

(i) $r(x_1 + x_2) = rx_1 + rx_2$.

(ii) $(r_1 + r_2)x = r_1x + r_2x$.

(iii) $(r_1r_2)x = r_1(r_2x)$.

(iv) $1x = x$.

Para abreviar, usaremos la notación M_R para denotar a un R-módulo derecho y ${}_RM$ para un R-módulo izquierdo.

Sea ${}_RM$, entonces para cada $r \in R$ podemos definir la función:

$$\theta(r) : M \to M$$

dada por la regla $\theta(r)(m) = rm$. Veamos que $\theta(r)$ es en realidad un endomorfismo izquierdo de M. En efecto, tenemos que:

$$\theta(r)(m_1 + m_2) = r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2 = \theta(r)(m_1) + \theta(r)(m_2)$$

Nótese que hemos usado el axioma (i) de R-módulo izquierdo. De esta forma hemos definido una función:

$$\theta : R \to End^l(M)$$

En realidad, esta función tiene más propiedades:

Proposición 1.4. *Si ${}_RM$ entonces la función $\theta : R \to End^l(M)$ dada por $\theta(r)(m) = rm$ es un homomorfismo de anillos con 1.*

Demostración. Veamos que son los axiomas (ii)-(iv) de R-módulo izquierdo, los que implican que θ es un homomorfismo de anillos con 1. En efecto, tenemos que:

(i) $\theta(r_1 + r_2)(m) = (r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m = \theta(r_1)(m) + \theta(r_2)(m)$
$= (\theta(r_1) + \theta(r_2))(m)$

Con lo que queda demostrado que $\theta(r_1 + r_2) = \theta(r_1) + \theta(r_2)$.

(ii) $\theta(r_1r_2)(m) = (r_1r_2)m = r_1(r_2m) = r_1(\theta(r_2)(m)) = \theta(r_1)(\theta(r_2)(m))$

$= (\theta(r_1)\theta(r_2))(m)$

Con lo que queda demostrado que $\theta(r_1 r_2) = \theta(r_1)\theta(r_2)$.

(iii) $\theta(1)(m) = 1 \cdot m = m = 1_M(m)$

Con lo que queda demostrado que $\theta(1) = 1_M$.

Con (i), (ii) y (iii) queda probado que efectivamente θ es un homomorfismo de anillos con 1. □

Inversamente, supongamos que M es un grupo abelianos aditivo, y que tenemos un homomorfismo de anillos con 1, $\theta : R \to End^l(M)$. Veamos que entonces podemos darle a M una estructura de R-módulo izquierdo como sigue:

Si $r \in R$ y $m \in M$, definimos:

$$rm = \theta(r)(m)$$

Tenemos entonces el recíproco de la proposición anterior:

Proposición 1.5. *Si M es un grupo abeliano aditivo y $\theta : R \to End^l(M)$ es un homomorfismo de anillos con 1, entonces M es un R-módulo izquierdo bajo la operación:*

$$rm := \theta(r)(m)$$

Demostración. En efecto tenemos que:

(i) $(r_1 r_2)m = \theta(r_1 r_2)(m) = (\theta(r_1)\theta(r_2))(m) = \theta(r_1)(\theta(r_2)(m)) = \theta(r_1)(r_2 m)$
$= r_1(r_2 m)$.

(ii) $(r_1 + r_2)m = \theta(r_1 + r_2)(m) = (\theta(r_1) + \theta(r_2))(m) = \theta(r_1)(m) + \theta(r_2)(m)$
$= r_1 m + r_2 m$.

(iii) $r(m_1 + m_2) = \theta(r)(m_1 + m_2) = \theta(r)(m_1) + \theta(r_2)(m_2) = rm_1 + rm_2$.

(iv) $1m = \theta(1)(m) = 1_M(m) = m$. □

En conclusión, hemos probado que cada R-módulo izquierdo define un homomorfismo de anillos con 1, $\theta : R \to End^l(M)$ e inversamente, lo que significa que pudimos haber definido un R-módulo izquierdo M como un grupo abeliano $(M, +)$ junto con un homomorfismo de anillos $\theta : R \to End^l(M)$.

En el caso de un R-módulo derecho, el cuidado que debe tenerse para que el resultado siga siendo válido, es en escribir la acción de los endomorfismos de M en notación funcional por la derecha, es decir, para cada $r \in R$, definimos $\theta(r) : M \to M$ por la regla $m\theta(r) = mr$. Entonces es fácil verificar que de esta forma se obtiene un homomorfismo de anillos con 1, $\theta : R \to End^r(M)$. Inversamente, cada homorfismo de anillos con 1, $\theta : R \to End^r(M)$ le da a M estructura de R-módulo derecho.

Cabe hacer el comentario de que si en este último caso la acción de los endomorfismos de M se escribe por la izquierda, entonces θ es lo que se llama un *antihomomorfismo* de anillos con 1, es decir, tal que $\theta(r_1 r_2) = \theta(r_2)\theta(r_1)$, y de aquí la importancia de usar la notación funcional correcta.

Ejemplo 1.2. Si $R = \mathbb{K}$ es un campo, entonces los $\mathbb{K}$-módulos no son otra cosa sino los espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.

Ejemplo 1.3. Si $R = \mathbb{Z}$, entonces los $\mathbb{Z}$-módulos son los grupos abelianos aditivo.

En efecto, es claro que cada $\mathbb{Z}$-módulo, por definición de módulo, debe ser un grupo abeliano aditivo; recíprocamente, si M es un grupo abeliano aditivo, entonces las *leyes de los exponentes* que se ven en teoría de grupos, traducidas al contexto de un grupo abeliano aditivo, se corresponden precisamente con los axiomas de $\mathbb{Z}$-módulo:

(i) $(n+m)x = nx + mx$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$ y para todo $x \in M$.
(ii) $n(x+y) = nx + ny$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y para todo $x, y \in M$.
(iii) $m(nx) = (mn)x$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$ y para todo $x \in M$.
(iv) $1x = x$ para todo $x \in M$.

Ejemplo 1.4. Si R es un anillo con 1, entonces R tiene estructura de R-módulo derecho bajo las mismas operaciones de R, es decir, si $x, y \in R$ y $r \in R$, entonces $x + y$ se calcula como en R, y xr igual. Los axiomas de anillo con 1, implican los axiomas de R-módulo derecho. A este módulo se le llama el módulo regular derecho y se le denota como R_R.

Ejemplo 1.5. Igual que en el ejemplo anterior, se puede definir el R-módulo regular izquierdo, el cual se denota como ${}_RR$.

Cabe señalar que si R no es un anillo conmutativo, entonces los R-módulos regulares R_R y ${}_RR$ no necesariamente coinciden.

Estos ejemplos serán muy útiles cuando estudiemos las propiedades de los R-módulos, así como los distintos tipos de R-módulos.

1.4. Aritmética Elemental de Módulos

Las propiedades elementales que se ven en espacios vectoriales son exactamente las mismas que las de R-módulos.

Proposición 1.6. *Si M_R, entonces para $r \in R$ y $m \in M$ se cumplen:*

(i) $m0 = 0$ *y* $0r = 0$.
(ii) $m(-r) = (-m)r = -(mr)$.
(iii) $m(-1) = -m$.

Demostración. (i) $m0 = m(0+0) = m0+m0$ y la ley de cancelación válida en grupos implica que $m0 = 0$. La otra es completamente análoga.

(ii) $m(-r) + mr = m(-r+r) = m0 = 0$ lo que implica que $m(-r) = -(mr)$. La otra igualdad es análoga.

(iii) Es un caso particular de (ii) con $r = 1$. □

1.5. Submódulos

El concepto análogo al de subespacio vectorial es el de submódulo, el cual establecemos a continuación:

Definición 1.9. Si M_R y $N \subset M$, decimos que N es un R-submódulo de M, si N es un R-módulo bajo las mismas operaciones de M. Usamos la notación $N \leq M$ para este caso.

Al igual que en espacios vectoriales se tiene que:

Proposición 1.7. *Si M_R y $N \subset M$, entonces $N \leq M$ si y solo si se cumplen las siguientes propiedades:*
(i) $0 \in N$.
(ii) Si $x, y \in N$, entonces $x + y \in N$.
(iii) Si $x \in N$ y $r \in R$, entonces $xr \in N$.

Ejemplo 1.6. Como comentamos arriba, si $R = \mathbb{K}$ es un campo, entonces los $\mathbb{K}$-submódulos son los subespacios vectoriales.

Ejemplo 1.7. Los R-submódulos del R-módulo regular derecho R_R son los ideales derechos de R. Por otro lado, los R-submódulos del R-módulo regular izquierdo ${}_RR$ son los ideales izquierdos.

Con este ejemplo resulta claro que si el anillo R no es conmutativo, entonces la estructura de R-módulo de R_R no tiene porque coincidir con la de ${}_RR$.

Ejemplo 1.8. Dado cualquier M_R, éste tiene como R-submódulos a $\{0\}$ y M, llamados los submódulos triviales de M.

Muchas propiedades de R-submódulos son análogas a las de subespacios vectoriales. A continuación enunciamos algunas de ellas, sin demostración.

Proposición 1.8. *Si $\{N_i\}_{i\in I}$ es una familia de R-submódulos de M_R, entonces $\bigcap_{i\in I} N_i$ es un R-submódulo de M.*

Proposición 1.9. *Si $\{N_i\}_{i\in I}$ es una familia de R-submódulos de M_R, entonces:*

$$\sum_{i\in I} N_i := \{x_{i_1} + \cdots + x_{i_n} | x_{i_j} \in N_{i_j}, \forall i_j, n > 0\}$$

es un R-submódulo de M.

Debido a la proposición 1.8, podemos hacer la siguiente:

Definición 1.10. Dado cualquier subconjunto S de M_R, el menor R-submódulo de M que contiene a S, es llamado el R-**submódulo generado** por S, y denotado por $\langle S\rangle$.

Obviamente se tiene que:

$$\langle S\rangle = \bigcap\{N \leq M | N \supset S\}$$

Ejemplo 1.9. Si $S = \emptyset$, es claro que todos los R-submódulos de M contienen a $\emptyset$, por lo que en este caso se sigue que $\langle\emptyset\rangle = \{0\}$.

Definición 1.11. Si M_R, $N \leq M$ y $S \subset M$, se dice que N está **generado** por S si $\langle S\rangle = N$. En el caso en que exista un subconjunto finito S de M tal que $\langle S\rangle = N$, entonces se dice que N es **finitamente generado**. Y en el caso en que exista un subconjunto $S = \{x\}$ tal que $\langle S\rangle = N$, entonces se dice que N es un R-submódulo **cíclico** de M, y se abrevia como $N = \langle x\rangle$.

La prueba de la siguiente proposición es completamente análoga a la de espacios vectoriales y la omitimos:

Proposición 1.10. *Si M_R y $S \subset M$ es no vacío, entonces:*

$$\langle S\rangle = \{\sum_{i=1}^{n} x_i r_i | x_i \in S, r_i \in R, n > 0\}$$

En otras palabras, cuando $S \neq \emptyset$, entonces $\langle S\rangle$ consta de todas las R-combinaciones lineales finitas de elementos de S. Un caso especial de esto es cuando $N \leq M$ es finitamente generado, de donde podemos afirmar que existen $x_1, \ldots, x_n \in M$ tales que:

$$N = \{x_1 r_1 + \cdots + x_n r_n | r_i \in R\} := x_1 R + \cdots + x_n R$$

Y en particular, si $N \leq M$ es cíclico, entonces existe $x \in M$ tal que $N = xR$.

1.6. Homomorfismos de Módulos

En esta sección, generalizamos el concepto de transformación lineal de espacios vectoriales a nuestro contexto de R-módulos.

Definición 1.12. Dados M_R y N_R, decimos que $f : M \to N$ es un **R-homomorfismo** si $f \in Hom(M, N)$ y $f(mr) = f(m)r, \forall r \in R$ y $\forall m \in M$.

Nótese que usando la notación por la izquierda, la condición $f(xr) = f(x)r$ se lee como una ley asociativa, pero en realidad es una ley conmutativa, ya que nos dice que es lo mismo si primero multiplicamos por r y luego aplicamos f, a que si primero aplicamos f y después multiplicamos por r. Esto se hace más claro si usamos la notación por la derecha ya que entonces la propiedad en cuestión se escribe como $(xr)f = (xf)r$.

Al conjunto de todos los R-homomorfismos de M en N lo denotamos por $Hom_R(M, N)$, y tenemos que:

Proposición 1.11. *$Hom_R(M, N)$ es un subgrupo de $Hom(M, N)$.*

Demostración. En efecto, sabemos que $0 \in Hom(M, N)$ pero además $0(mr) = 0 = 0r = 0(m)r$, con lo cual $0 \in Hom_R(M, N)$.

Por otro lado, si $f, g \in Hom_R(M, N)$ entonces sabemos que $f+g \in Hom(M, N)$ pero además,

$$(f+g)(mr) = f(mr)+g(mr) = f(m)r+g(m)r = (f(m)+g(m))r = (f+g)(m)r$$

por lo que $f + g \in Hom_R(M, N)$. Finalmente, si $f \in Hom_R(M, N)$ entonces sabemos que $-f \in Hom(M, N)$ pero además,

$$(-f)(mr) = -f(mr) = -(f(m)r) = (-f(m))r = (-f)(m)r$$

por lo que $-f \in Hom_R(M, N)$. □

Si $M = N$, entonces un R-homomorfismo $f : M \to M$ se llama R-endomorfismo de M. Denotamos al conjunto de todos los R-endomorfismos de M como $End_R(M)$ y tenemos que:

Proposición 1.12. *$End_R(M)$ es un subanillo de $End^l(M)$.*

Demostración. Sabemos por la proposición 1.11 que $End_R(M)$ es un subgrupo aditivo de $End^l(M)$, y también sabemos que si $f, g \in End_R(M, N)$, entonces $fg \in End^l(M)$ pero además:

$$(fg)(mr) = f(g(mr)) = f(g(m)r) = f(g(m))r = (fg)(m)r$$

con lo cual tenemos que $fg \in End_R(M, N)$. Finalmente, es claro que $1_M \in End_R(M)$. □

1.7. Núcleo y Conúcleo

Seguimos con la analogía de los conceptos del álgebra lineal y módulos. Tenemos la siguiente:

Definición 1.13. Si $f \in Hom_R(M, N)$, definimos el **núcleo** de f como:

$$ker f = \{m \in M | f(m) = 0\}$$

Asimismo se define la **imagen** de f como:

$$Im f = \{f(m) | m \in M\}$$

La prueba del siguiente resultado es análoga a la de espacios vectoriales y la omitimos.

Proposición 1.13. *$ker f$ es un R-submódulo de M e $Im f$ es un R-submódulo de N. Además, $f \in Hom_R(M, N)$ es inyectiva si y sólo si $ker f = \{0\}$ y f es suprayectiva si y sólo si $Im f = N$.*

Definición 1.14. Si $f \in Hom_R(M, N)$ es inyectiva, entonces decimos que f es un **R-monomorfismo**, y si f es suprayectiva, decimos que f es un **R-epimorfismo**. Cuando f es biyectiva, decimos que f es un **R-isomorfismo** y en el caso en que $f \in End_R(M)$ es biyectiva, entonces decimos que f es un **R-automorfismo**.

Definición 1.15. Dados M_R y N_R, decimos que M es **isomorfo** a N si existe un R-isomorfismo $f : M \to N$. En este caso se denota por $M \approx N$.

Por ejemplo, todo módulo M_R es isomorfo a sí mismo, ya que existe el R-isomorfismo 1_M. De hecho, es fácil verificar que la relación de ser isomorfos, es una relación de equivalencia en la clase de todos los R-módulos.

Sabemos que si M_R y $N \leq M$, entonces podemos definir el grupo cociente M/N como el conjunto de las clases laterales:

$$M/N = \{N + m | m \in M\}$$

Es fácil verificar que podemos darle estructura de R-módulo derecho a M/N si definimos:

$$(N + m)r = N + mr$$

Definición 1.16. Si M_R y $N \leq M$, el R-módulo M/N se llama **R-módulo cociente**.

Siempre podemos definir un R-epimorfismo canónico $\pi : M \to M/N$ tal que $\pi(m) = N + m$, y resulta claro que $ker\pi = N$. Nos referimos a este epimorfismo como la proyección canónica al cociente.

Definición 1.17. Si $f \in Hom_R(M, N)$, se define el **conúcleo** de f como el R-módulo cociente N/Imf.

Ejemplo 1.10. El núcleo del homomorfismo nulo $0 : M \to N$ es M y el conúcleo es $N/\{0\} \approx N$.

Ejemplo 1.11. El núcleo del homomorfismo identidad $1_M : M \to M$ es $\{0\}$ y el conúcleo es $M/M \approx \{0\}$.

1.8. Teorema del Factor

Finalizamos esta unidad con varios teoremas de suma importancia para el desarrollo de todo el curso, por lo que sugerimos no avanzar a la siguiente unidad si no se han comprendido perfectamente estos teoremas, así como las demostraciones de cada uno de ellos.

El primero es, sin lugar a dudas, la piedra angular de todo, ya que las demostraciones de los demás teoremas esencialmente están basados en éste.

Teorema 1.14. (**Teorema del Factor**) *Sea $f : M \to M'$ un R-homomorfismo, y supongamos que $N \leq M$ es tal que $f(N) = \{0\}$, es decir, tal que $N \subset ker f$. Entonces existe un único R-homomorfismo $g : M/N \to M'$ el cual hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M' \\ & M/N \arrow[ur, dashed, "\exists! g"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, tal que $g\pi = f$. Además:

(i) Si $N = ker f$, entonces g es R-monomorfismo.

(ii) Si f es R-epimorfismo, entonces g es R-epimorfismo.

Demostración. Si queremos que el diagrama sea conmutativo, entonces para todo $x \in M$ se debe cumplir que $g\pi(x) = f(x)$, es decir, que forzosamente $g(N + x) = f(x)$. Esto por si mismo prueba que el R-homomorfismo que hace que el diagrama sea conmutativo, si existe, debe ser único.

Por lo tanto, definimos $g : M/N \to M'$ tal que $g(N + x) = f(x)$, y probamos en primer lugar que g está bien definida. En efecto, si $N+x = N+y$, entonces $x-y \in N$, y como por hipótesis $N \subset ker f$, entonces $f(x - y) = 0$, de donde $f(x) = f(y)$.

El hecho de que g es R-homomorfismo se sigue de que f lo es.

A continuación probamos los incisos (i) y (ii):

(i) Suponemos que $N = ker f$ y que $g(N + x) = 0$, es decir, $f(x) = 0$, lo que significa que $x \in ker f = N$ y de aquí que $N + x = N$, lo que demuestra que g es inyectiva.

(ii) Ya que f es suprayectiva, para cada $y \in M'$ $\exists x \in M$ tal que $f(x) = y$, de donde $g(N + x) = f(x) = y$, lo que demuestra que g es suprayectiva. $\square$

1.9. Teoremas de Isomorfismo de Noether

Ahora veamos los no menos importantes teoremas de isomorfismo de Noether, aunque en realidad, el Primer Teorema de Isomorfismo es el que se aplica con mayor frecuencia. La demostración de este teorema se basa en el Teorema del Factor.

Teorema 1.15. *(***Primer Teorema de Isomorfismo***)*
Sea $f : M \to M'$ un R-epimorfismo, entonces existe un único R-isomorfismo $g : M/ker f \to M'$ el cual hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M' \\ & M/ker f \arrow[ur, dashed, "\approx", "\exists! g"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Si aplicamos el Teorema del Factor con $N = ker f$, sabemos de la existencia de un R-homomorfismo g el cual hace que el diagrama anterior sea conmutativo. Además, por los incisos (i) y (ii) del Teorema del Factor, se sigue que g es un R-isomorfismo. □

Teorema 1.16. *(***Segundo Teorema de Isomorfismo***) Sean $N, K \leq M_R$, entonces existe un R-isomorfismo $N/(N \cap K) \approx (N + K)/K$.*

Demostración. Definimos el R-homomorfismo $f : N \to (N + K)/K$ tal que para cada $x \in N$, $f(x) = K + x$. Es fácil ver que f es R-epimorfismo y además:

$$ker f = \{x \in N | f(x) = K + x = K\} = N \cap K$$

Por lo que aplicando el Primer Teorema de Isomorfismo obtenemos el R-isomorfismo deseado. □

Teorema 1.17. *(***Tercer Teorema de Isomorfismo***)*
Sean $N_R \leq K_R \leq M_R$, entonces existe un R-isomorfismo:

$$(M/N)/(K/N) \approx M/K$$

Demostración. Sea $\pi : M \to M/K$ la proyección canónica. Como $ker\pi = K \supset N$, se sigue por el Teorema del Factor, que hay un único R-homomorfismo $g : M/N \to M/K$ tal que $g(N + x) = \pi(x) = K + x$. Pero además como π es suprayectiva, entonces g es suprayectiva.

Finalmente $kerg = \{N + x | g(N + x) = K + x = K\} = K/N$, así que aplicando el Primer Teorema de Isomorfismo terminamos con la prueba. □

1.10. Teorema de la Correspondencia

El siguiente teorema tiene como una de sus consecuencias, la existencia de una correspondencia biyectiva entre los submódulos de un cociente M/N y los submódulos de M que contienen a N. Este hecho lo demostramos después del teorema.

Teorema 1.18. *(***Teorema de la Correspondencia***)*
Sea $f : M \to M'$ un R-epimorfismo, y sean $A = \{N' | N' \leq M'\}$ y $B = \{N | kerf \leq N \leq M\}$. Entonces existe una correspondencia biyectiva entre A y B dada por:

$$\psi : N' \mapsto f^{-1}(N')$$

Además esta correspondencia respeta intersecciones y sumas finitas.

Demostración. Es fácil ver que $f^{-1}(N')$ es un R-submódulo de M, y además si $x \in kerf$, entonces $f(x) = 0 \in N'$ es decir, $x \in f^{-1}(N')$. Por lo tanto ψ está bien definida.

Para probar que ψ es una biyección, exhibimos su función inversa, definida como:

$$\varphi : N \mapsto f(N)$$

Debemos probar entonces que ψ y φ cumplen que $\psi\varphi = 1_B$ y $\varphi\psi = 1_A$. En efecto, tenemos que $\psi\varphi(N) = f^{-1}(f(N))$ por lo que si $x \in f^{-1}(f(N))$, entonces

$f(x) = f(y)$ para algún $y \in N$, pero entonces $x - y \in ker f \subset N$ y de aquí se sigue que $x \in N$. Esto prueba que $f^{-1}(f(N)) \subset N$. Inversamente, si $x \in N$, entonces $f(x) \in f(N)$ lo que significa que $x \in f^{-1}(f(N))$ con lo cual queda demostrada la otra contención y la igualdad.

Por otro lado, tenemos que $\varphi\psi(N') = f(f^{-1}(N')$ por lo que si $x \in f(f^{-1}(N'))$, entonces $x = f(y)$ con $y \in f^{-1}(N')$ y esto significa que $x = f(y) \in N'$, con lo cual queda probado que $f(f^{-1}(N')) \subset N'$. Inversament, si $x \in N'$, entonces como f es suprayectiva, existe un $y \in M$ tal que $x = f(y)$ y esto implica que $y \in f^{-1}(N')$, por lo que $x = f(y) \in f(f^{-1}(N'))$ con lo cual queda probada la otra contención y por lo tanto la igualdad.

Solo nos resta demostrar que $\psi(N' \cap K') = \psi(N') \cap \psi(K')$ y $\psi(N' + K') = \psi(N') + \psi(K')$, las cuales se demuestran fácilmente por doble contención. En efecto, si $x \in \psi(N' \cap K')$, entonces $x \in f^{-1}(N' \cap K')$, es decir $f(x) \in N' \cap K'$ de donde $x \in f^{-1}(N') \cap f^{-1}(K')$ lo que prueba una contención. Inversamente si $x \in f^{-1}(N') \cap f^{-1}(K')$, entonces $f(x) \in N' \cap K'$ lo que significa que $x \in f^{-1}(N' \cap K')$ probando así la otra contención y la igualdad. La otra igualdad se prueba de manera análoga.

Finalmente, es fácil verificar que también φ respeta intersecciones y sumas finitas. $\square$

Corolario 1.19. *Si $N \leq M_R$, entonces hay una correspondencia entre los submódulos de M/N y los submódulos de M que contienen a N. En particular, todo submódulo de M/N es de la forma K/N donde $N \leq K \leq M$.*

Demostración. Consideramos la proyección canónica:

$$\pi : M \to M/N$$

La cual sabemos que es un R-epimorfismo con núcleo N. La primera parte del corolario es entonces una consecuencia inmediata del Teorema de la Correspondencia. Para la segunda parte, vemos que si $N' \leq M/N$, entonces por la biyección establecida en el teorema anterior, se tiene que $N' = \varphi\psi(N') = \pi(\pi^{-1}(N') = K/N$ donde $K = \pi^{-1}(N')$. $\square$

1.11. Ley Modular

Finalizamos esta unidad demostrando una ley que es una peculiaridad de los R-módulos, y que dio lugar incluso a definir ciertas estructuras algebraicas las cuales satisfacen la misma propiedad (*retículas modulares*).

Teorema 1.20. *(***Ley Modular***)*
Sean $N, K, L \leq M_R$ tales que $N \supset K$. Entonces:

$$N \cap (K + L) = K + (N \cap L)$$

Demostración. La prueba es por doble contención, así que tomamos $x \in N \cap (K+L)$, de donde $x \in N$ y $x = y+z$ con $y \in K$ y $z \in L$. Pero entonces $y \in N$ y $z = x-y \in N$, lo que demuestra que $z \in N \cap L$ de donde $x = y + z \in K + (N \cap L)$. Esto demuestra que $N \cap (K + L) \subset K + (N \cap L)$.

Inversamente, si $x \in K + (N \cap L) \subset K + L$, de donde $x \in K + L$, pero además $x = y+z$ con $y \in K \subset N$ y $z \in (N \cap L) \subset N$, por lo que también se tiene que $x \in N$. En conclusión, $x \in N \cap (K + L)$, lo que prueba la otra contención y la igualdad. □

Corolario 1.21. *Sean $N, K, L \leq M_R$ tales que $N \supset K$. Entonces:*

$$N + L = K + L \text{ y } N \cap L = K \cap L \;\Rightarrow\; N = K$$

Demostración. Por la Ley Modular se sigue que:

$$N \cap (K + L) = K + (N \cap L)$$

Pero entonces tenemos que:

$$N = N \cap (N + L) = N \cap (K + L) = K + (N \cap L) = K + (K \cap L) = K$$

□

1.12. Ejercicios Resueltos

EJERCICIO 1.1. Sea $M \neq \{0\}$ un grupo abeliano y sean $L = End^l(M)$ y $R = End^r(M)$. Demostrar que ${}_LM$ y M_R.

EJERCICIO 1.2. Sea $\phi : R \to S$ un homomorfismo de anillos con 1. Probar que cada S-módulo izquierdo (derecho) tiene estructura de R-módulo izquierdo (derecho).

EJERCICIO 1.3. Un módulo ${}_RM$ a través de $\phi : R \to End^l(M)$ se llama fiel si ϕ es inyectivo. Por otro lado, el anulador (izquierdo) de ${}_RM$ se define como:

$$An_R(M) = \{r \in R : rm = 0, \forall m \in M\}$$

Probar que:

(a) $An_R(M)$ es un ideal de R.
(b) $_RM$ es fiel $\Leftrightarrow An_R(M) = \{0\}$
(c) Existe un homomorfismo de anillos con 1 $\psi : R/An_R(M) \to End^l(M)$ y por lo tanto, M tiene estructura de $R/An_R(M)$-módulo izquierdo.
(d) M es fiel como $R/An_R(M)$-módulo izquierdo.

EJERCICIO 1.4. Sea $f \in Hom_R(M, N)$. Demostrar que:

(a) Si f es monomorfismo, entonces $An_r(N) \subset An_R(M)$.
(b) Si f es epimorfismo, entonces $An_R(M) \subset An_R(N)$.

EJERCICIO 1.5. Sean $f \in Hom_R(M, N)$ y $K \leq M$. Si $f|_K$ denota el homomorfismo restricción de f a K, probar que:

(a) Si $K \cap ker f = \{0\}$, entonces $f|_K$ es monomorfismo.
(b) Si f es epimorfismo y $K + ker f = M$, entonces $f|_K$ es epimorfismo.

EJERCICIO 1.6. Un módulo $_RM$ se llama módulo simple, si $M \neq \{0\}$ y M no tiene submódulos no triviales. Probar que:

$$M \neq \{0\} \text{ es simple} \Leftrightarrow M = \langle x \rangle, \forall x \in M \backslash \{0\}$$

EJERCICIO 1.7. Sea $_RM \neq \{0\}$. Probar que son equivalentes:

1. M es simple.

2. $\forall _RN$ y $f \in Hom_R(M, N)$ se cumple:
$$f \neq 0 \Rightarrow f \text{ es monomorfismo}$$

3. $\forall _RN$ y $f \in Hom_R(N, M)$ se cumple:
$$f \neq 0 \Rightarrow f \text{ es epimorfismo}$$

EJERCICIO 1.8. Un submódulo $N \leq {}_RM$ se llama maximal si $N \neq M$ y $\forall L \leq {}_RM$:
$$N \leq L \leq M \;\Rightarrow\; L = N \text{ o } L = M$$
Probar que $N \leq M$ es maximal $\Leftrightarrow M/N$ es simple.

EJERCICIO 1.9. Sea $_RM$ finitamente generado y $M \neq \{0\}$. Demostrar que para cada $K \leq M$ con $K \neq M$, existe N un submódulo máximal de M tal que $K \subset N$. En particular, M tiene submódulos maximales.

EJERCICIO 1.10. $_RM$ es cíclico $\Leftrightarrow M \approx R/I$ para algún $I \leq_R R$.

EJERCICIO 1.11. Probar que un $\mathbb{Z}$-módulo M es simple $\Leftrightarrow M \approx \mathbb{Z}_p$ (con p primo).

Gustavo Tapia Sánchez *(gtapia@uacj.mx)*
Luis Loeza Chin *(luis.loeza@uacj.mx)*
Francisco Ávila Álvarez *(favila@uacj.mx)*
Instituto de Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Ave. del Charro 450 Norte, Partido Romero, Ciudad Juárez, Chihuahua, México, 32310.

Capítulo

2 Introducción a la Teoría de Categorías

En esta unidad vemos una introducción a la Teoría de Categorías, dando algunos ejemplos de categorías, entre los que destacan las categorías de módulos. Definimos los funtores entre categorías (covariantes y contravariantes), y definimos el funtor Hom el cual es covariante en una variable y contravariante en la otra. También definimos las categorías preaditivas así como los funtores aditivos. Posteriormente vemos las sucesiones exactas, principalmente las sucesiones exactas cortas, y dentro de éstas, las que se escinden. Con esta herramienta en mano, podemos definir entonces los funtores exactos izquierdos y derechos, y probamos que el funtor Hom es exacto izquierdo en una variable y exacto derecho en la otra.

2.1. Definición de Categorías

Para poder definir una categoría, es necesario distinguir entre un conjunto y una clase, pero como nuestro tema de estudio no es la teoría de conjuntos, simplemente mencionamos que todo conjunto es una clase lo suficientemente pequeña como para poder asignarle un número cardinal, mientras que una clase es tan grande que no es posible asignarle un número cardinal. Por ejemplo, si agrupamos a todos los conjuntos, esa agrupación es una clase que no es un conjunto.

Definición 2.1. Una **categoría** $\mathcal{C}$ consta de los siguientes ingredientes:

1. Una clase de objetos, obj $\mathcal{C}$.

2. Para cada par de objetos $A, B \in$ obj $\mathcal{C}$ existe un conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ cuyos elementos son llamados homomorfismos de A en B, y representados con flechas $f : A \to B$, con el requerimiento de que si A', B' son otro par de objetos de $\mathcal{C}$ tales que $(A, B) \neq (A', B')$, entonces $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(A', B') = \emptyset$.

3. Si $A, B, C \in$ obj $\mathcal{C}$, entonces existe una función:

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$$

   llamada la composición de homomorfismos, tal que si $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$, entonces su composición es denotada por $gf \in Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$, y tal que se cumplen los siguientes axiomas:

   (i) La composición es asociativa, es decir, $h(gf) = (hg)f$, siempre que $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$.

   (ii) Para cada $A \in$ obj $\mathcal{C}$ existe un homomorfismo $1_A \in Hom(A, A)$, llamado homomorfismo identidad, tal que $f1_A = f, \forall f : A \to B$, y $1_A g = g, \forall g : C \to A$.

Utilizando los diagramas de flechas podemos visualizar los axiomas (i) y (ii) de la definición de categoría. Así, la ley asociativa para la composición de homomorfimos se resume diciendo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "hg"] & \\
& C \arrow[r, "h"'] & D
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, la propiedad del homomorfismo identidad se resume con el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "g"] & \\
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

Veamos varios ejemplos de categorías:

Ejemplo 2.1. La categoría de los conjuntos, denotada como $\mathcal{C} =$ **Sets**, cuyos objetos forman la clase que contiene a todos los conjuntos, y si A y B son conjuntos, entonces:

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, B) = \{f : A \to B |\ f \text{ es función } \}$$

y la composición es la usual de funciones.

Es claro entonces que se cumplen los axiomas (i) y (ii) de categorías.

Ejemplo 2.2. La categoría de todos los grupos, denotada como $\mathcal{C} = \mathcal{G}r$, cuyos objetos forman la clase que contiene a todos los grupos, y si G y G' son grupos, entonces:

$$Hom_{\mathcal{C}}(G, G') = \{f : G \to G' |\ f \text{ es homomorfismo de grupos } \}$$

y la composición es la usual de funciones.

Es claro entonces que se cumplen los axiomas (i) y (ii) de categorías.

Ejemplo 2.3. La categoría de todos los anillos, denotada como $\mathcal{C} =$ **An**, cuyos objetos forman la clase que contiene a todos los anillos, y si R y R' son anillos, entonces:

$$Hom_{\mathcal{C}}(R, R') = \{f : R \to R' |\ f \text{ es homomorfismo de anillos } \}$$

y la composición es la usual de funciones.

Es claro entonces que se cumplen los axiomas (i) y (ii) de categorías.

De forma análoga se puede definir la categoría de todos los anillos con 1.

Ejemplo 2.4. La categoría de los espacios topológicos, la cual denotamos por $\mathcal{C} =$ **Top**, cuyos objetos forman la clase que contiene a todos los espacios topológicos, si X y Y son espacios topológicos, entonces:

$$Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) = \{f : X \to Y |\ f \text{ es continua } \}$$

y la composición, es la usual de funciones.

Es claro entonces que se cumplen los axiomas (i) y (ii) de categorías.

Ejemplo 2.5. Para cada anillo con 1, R, podemos definir la categoría de los R-módulos derechos, denotada por $\mathcal{C} =$ **Mod-R**, cuyos objetos forman la clase que contiene a todos los R-módulos derechos y si M_R y N_R entonces:

$$Hom_{\mathcal{C}}(M, N) = \{f : M \to N |\ f \text{ es R-homomorfismo } \}$$

y la composición es la usual de funciones.

Nuevamente es claro que se cumplen los axiomas (i) y (ii) de categorías.

Ejemplo 2.6. También para cada anillo con 1, R, se puede definir la categoría $\mathcal{C} =$ **R-Mod**, de los R-módulos izquierdos.

Ejemplo 2.7. Un caso particular de los dos ejemplos anteriores, es cuando tomamos $R = \mathbb{Z}$, ya que como vimos en la unidad anterior, los $\mathbb{Z}$-módulos son precisamente los grupos abelianos. En este caso, la categoría se denota como $\mathcal{C} =$ **Ab**.

Ejemplo 2.8. Sea S un monoide, es decir, S tiene definida una operación asociativa y tiene un elemento identidad bilateral. Con S definimos la categoría $\mathcal{C}$ cuyos objetos es obj $\mathcal{C} = \{*\}$, $Hom_{\mathcal{C}}(*, *) = S$ y si $x, y \in Hom_{\mathcal{C}}(*, *) = S$, entonces la composición se define como el producto en S.

Por ser S un monoide, es claro entonces que se cumplen los axiomas (i) y (ii) de categorías.

Este es un ejemplo de una categoría tal que los homomorfismos no son funciones.

Ejemplo 2.9. Sea X un conjunto casi ordenado, es decir, tiene definida una relación $\leq$ la cual es reflexiva y transitiva. Definimos una categoría $\mathcal{C}$ tal que obj $\mathcal{C} = X$, si $x, y \in X$, entonces $Hom_{\mathcal{C}}(x, y) = \{i_y^x\}$ si $x \leq y$ y $Hom_{\mathcal{C}}(x, y) = \emptyset$ en otro caso. La regla de composición está definida como sigue: si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $i_z^y i_y^x = i_z^x$.

Es fácil verificar que se cumplen los axiomas (i) y (ii) de categorías.

Este es un ejemplo, en donde algunos conjuntos Hom pueden ser vacíos.

Un tipo especial de categorías es definido a continuación:

Definición 2.2. Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, decimos que $\mathcal{D}$ es una **subcategoría** de $\mathcal{C}$ si se cumplen:

(i) $obj\ (\mathcal{D}) \subset obj\ (\mathcal{C})$.

(ii) Para cada par de objetos $A, B \in obj\ (\mathcal{D})$ se verifica que:

$$Hom_{\mathcal{D}}(A, B) \subset Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$$

(iii) La composición de homomorfismos en la categoría $\mathcal{D}$ es la restricción de la composición de homomorfismos en la categoría $\mathcal{C}$.

Además, en el caso cuando $Hom_{\mathcal{D}}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, para cada par de objetos $A, B \in obj\ (\mathcal{D})$, entonces se dice que $\mathcal{D}$ es una **subcategoría plena** de $\mathcal{C}$. Es claro que en este caso, la subcategoría plena $\mathcal{D}$ queda perfectamente definida por sus objetos.

Ejemplo 2.10. Sea $\mathcal{R}el$ la categoría cuya clase de objetos es la de todos los conjuntos y para cada par de conjuntos A y B, el conjunto de homomorfismos es el de todas las relaciones de A en B, es decir:

$$Hom_{\mathcal{R}el}(A, B) = \mathcal{P}\,(A \times B) = 2^{A \times B}$$

Entonces es claro que con la composición usual de relaciones, $\mathcal{R}el$ es una categoría y además **Sets** es una subcategoría no plena de $\mathcal{R}el$.

Ejemplo 2.11. Podemos enunciar muchos ejemplos de subcategorías utilizando las categorías definidas anteriormente, por mencionar algunos:

(i) $\mathcal{A}b$ es una subcategoría plena de $\mathcal{G}r$, mientras esta última es una subcategoría no plena de **Sets**.

(ii) Para cada anillo R, la categoría $R - Mod$ es una subcategoría (en general no plena) de $\mathcal{A}b$.

(iii) Para cada anillo R, la categor'ia $R - mod$, cuyos objetos son los R-módulos izquierdos finitamente generados, es una subcategoría plena de $R - Mod$.

Un tipo muy importante de categoría es definido en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.12. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, definimos la **categoría dual** de $\mathcal{C}$, denotada como $\mathcal{C}^{op}$, como sigue:

- $obj\ (\mathcal{C}^{op}) = obj\ (\mathcal{C})$.
- Para cada par de objetos A y B, $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$.
- Si $f \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A, B)$ y $g \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(B, C)$, entonces definimos la composición gf en $\mathcal{C}^{op}$ como la composición fg en $\mathcal{C}$.

Es fácil verificar que se cumplen los axiomas de categoría para $\mathcal{C}^{op}$.

Coloquialmente hablando, decimos que la categoría dual $\mathcal{C}^{op}$ "invierte las flechas" de la categoría $\mathcal{C}$, y es esta idea la que dará origen al importante concepto de *dualidad* el cual veremos más adelante.

Hay muchos más ejemplos de categorías, pero con los que hemos dado es suficiente para ejemplificar los diversos conceptos que veremos.

2.2. Funtores

Así como existen las funciones entre conjuntos, o los homomorfismos entre grupos, también existen los llamados funtores entre categorías, los cuales sirven para estudiar las relaciones que puedan existir entre dos categorías dadas.

Definición 2.3. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías, un **funtor covariante** entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ es una regla de correspondencia denotada como $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que:
(i) Para cada $A \in$ obj $\mathcal{C}$, $F(A) \in$ obj $\mathcal{D}$.
(ii) Si $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, entonces $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$.
(iii) $F(gf) = F(g)F(f)$.
(iv) Si $A \in$ obj $\mathcal{C}$, entonces $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

En otras palabras, un funtor covariante manda objetos en objetos, morfismos en morfismos, respeta las composiciones y las identidades. Una forma simple de visualizar el concepto de funtor covariante, es a través de los diagramas; así por ejemplo, la propiedad (iii) de la definición anterior, se ve como sigue:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \arrow[dd, bend left=60, "F(gf)"] \\ B \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "g"'] & F(B) \arrow[d, "F(g)"] \\ C \arrow[r, mapsto] & F(C) \end{tikzcd}$$

Mientras que la propiedad de preservación de las identidades se ve así:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "1_A"'] & F(A) \arrow[d, "F(1_A)=1_{F(A)}"] \\ A \arrow[r, mapsto] & F(A) \end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.13. Si $\mathcal{C}$ es cualquier categoría, definimos el **funtor identidad** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que para cada $A \in$ obj $\mathcal{C}$, $F(A) = A$ y si $f : A \to B$, entonces $F(f) : A \to B$ donde $F(f) = f$ que trivialmente cumple (iii) y (iv) de la definición de funtor.

Ejemplo 2.14. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías, y sea $D \in$ obj $\mathcal{D}$ (fijo), definimos el **funtor constante** como $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que para cada $A \in$ obj $\mathcal{C}$, $F(C) = D$, y si $f : C_1 \to C_2$, entonces $F(f) : D \to D$ tal que $F(f) = 1_D$, y fácilmente se ve que se cumplen las condiciones (iii) y (iv) de la definición de funtor.

En varias ocasiones es posible definir lo que se acostumbra llamar "funtor que olvida". Veamos un par de ejemplos:

Ejemplo 2.15. Sea $F : \mathcal{G}r \to$ **Sets** tal que para cada grupo G, $F(G)$ denota al conjunto subyacente de G, es decir, $F(G)$ "se olvida" que G es un grupo y solamente "se acuerda" que G es un conjunto. Además, si $f : G \to G'$ es un homomorfismo de grupos, entonces $F(f) = f$ es la función subyacente de f, es decir $F(f)$ "se olvida" que f es un homomorfismo y únicamente "se acuerda" que f es una función entre dos conjuntos.

Es claro que esto define un funtor covariante.

Ejemplo 2.16. Sea $F : Mod - R \to \mathcal{A}b$ tal que para cada R-módulo derecho M, $F(M)$ denota al grupo abeliano subyacente de M, es decir, $F(M)$ "se olvida" que M es un R-módulo derecho y solamente "se acuerda" que M es un grupo abeliano.

Además, si $f : M \to N$ es un homomorfismo de R-módulos, entonces $F(f) = f$ es el homomorfismo de grupos abelianos subyacente de f, es decir $F(f)$ "se olvida" que f es un R-homomorfismo y únicamente "se acuerda" que f es un homomorfismo entre dos grupos abelianos.

Es claro que de esta forma, podemos definir diversos funtores que olvidan.

Ejemplo 2.17. Sea $\mathcal{D}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$ y definimos el **funtor inclusión** $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que para cada objeto A de $\mathcal{D}$, $F(A) = A$ visto como objeto de $\mathcal{C}$, y si $f : A \to B$ es un homomorfismo de la categoría $\mathcal{D}$, entonces $F(f) = f$ visto como homomorfismo de la categoría $\mathcal{C}$.

Es claro que esto define un funtor covariante.

Uno de los funtores covariantes más importantes es el que definimos a continuación.

Ejemplo 2.18. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sea $A \in$ obj $\mathcal{C}$ (fijo), definimos el **funtor covariante Hom** como:

$$F = Hom_{\mathcal{C}}(A, \_\,) : \mathcal{C} \to Sets$$

tal que si $B \in$ obj $\mathcal{C}$, entonces $F(B) = Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, y si $f : B \to C$, entonces $F(f) : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$ tal que $F(f)(g) = fg$.

En efecto, $F(hf)(g) = (hf)g = h(fg) = F(h)(fg) = F(h)(F(f)(g))$ lo que demuestra que $F(hf) = F(h)F(f)$. Además, $F(1_B)(g) = 1_B g = g$ lo que implica que $F(1_B) = 1_{F(B)}$.

En el ejemplo anterior, es costumbre escribir $F(f) := f_*$, por lo que $f_*(g) = fg$.

Existe otro tipo de funtor entre categorías, el cual definimos a continuación.

Definición 2.4. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías, un **funtor contravariante** entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ es una regla de correspondencia denotada como $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que:

(i) Para cada $A \in$ obj $\mathcal{C}$, $G(A) \in$ obj $\mathcal{D}$.

(ii) Si $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, entonces $G(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$.

(iii) $G(gf) = G(f)G(g)$.

(iv) Si $A \in$ obj $\mathcal{C}$, entonces $G(1_A) = 1_{G(A)}$.

En otras palabras, un funtor contravariante tiene casi las mismas propiedades que las de un funtor covariante, solo que invierte las flechas. En este caso, el diagrama que representa la propiedad (iii) de la definición anterior se ve como sigue:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & G(A) \\
B \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "g"'] & G(B) \arrow[u, "G(f)"'] \\
C \arrow[r, mapsto] & G(C) \arrow[u, "G(g)"'] \arrow[uu, bend right=60, "G(gf)"']
\end{tikzcd}$$

Mientras que la propiedad de preservación de las identidades se ve así:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "1_A"'] & G(A) \\
A \arrow[r, mapsto] & G(A) \arrow[u, "G(1_A)=1_{G(A)}"']
\end{tikzcd}$$

Uno de los ejemplos más importantes de funtor contravariante nos lo otorga de nueva cuenta un funtor Hom, solamente que en esta ocasión se mantendrá fija la segunda componente. Aclaramos de manera precisa esta idea en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.19. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sea $B \in$ obj $\mathcal{C}$ (fijo), definimos el **funtor contravariante Hom** como:

$$G = Hom_{\mathcal{C}}(\_\,, B) : \mathcal{C} \to Sets$$

tal que si $A \in$ obj $\mathcal{C}$, entonces $G(A) = Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, y si $f : A \to C$, entonces $G(f) : Hom_{\mathcal{C}}(C, B) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ tal que $G(f)(g) = gf$.

En efecto, $G(hf)(g) = g(hf) = (gh)f = G(f)(gh) = G(f)(G(h)(g))$ lo que demuestra que $G(hf) = G(f)G(h)$. Además, $F(1_A)(g) = g1_A = g$ lo que implica que $G(1_A) = 1_{G(A)}$.

En el ejemplo anterior, es costumbre escribir $G(f) := f^*$, por lo que $f^*(g) = gf$.

Coloquialmente hablando, decimos que si mantenemos fija la primera componente, entonces el funtor Hom es covariante, mientras que si mantenemos fija la segunda componente, entonces el funtor Hom es contravariante.

2.3. Categorías Pre-aditivas y Funtores Aditivos

Para ciertas categorías, los funtores Hom definidos anteriormente tienen características peculiares. Por ejemplo, para la categoría $\mathcal{C} = Mod - R$ (o $\mathcal{C} = R - Mod$), se sabe que para cada par de R-módulos M y N, el conjunto $Hom_R(M,N)$ es un subgrupo del grupo abeliano $Hom(M,N)$, y por lo tanto, el mismo $Hom_R(M,N)$ es un grupo abeliano aditivo, en donde además, es fácil ver que se cumple que $(f+g)h = fh+gh$ si $f,g \in Hom_R(M,N)$ y $h \in Hom_R(K,M)$, y también $h(f+g) = hf+hg$ si $f,g \in Hom_R(M,N)$ y $h \in Hom_R(N,L)$.

Pero además vemos que en este caso el funtor covariante Hom sufre un cambio en su contradominio, esto es,

$$Hom_R(M,\_\,) : Mod-R \to \mathcal{A}b$$

para lo cual sólo debemos probar que si $f : N \to L$, entonces f_* es un homomorfismo de grupos abelianos; en efecto, tenemos que:

$$f_*(g_1+g_2) = f(g_1+g_2) = fg_1+fg_2 = f_*(g_1)+f_*(g_2)$$

Nótese que para probar que f_* es un homomorfismo de grupos, únicamente usamos el hecho de que la composición distribuye a la suma.

Análogamente se verifica que el funtor Hom contravariante, también sufre el mismo cambio en su contradominio, esto es,

$$Hom_R(\_\,,N) : Mod-R \to \mathcal{A}b$$

Lo anterior motiva el siguiente concepto:

Definición 2.5. Una categoría $\mathcal{C}$ se llama **categoría pre-aditiva**, si para cada par $A,B \in$ obj $\mathcal{C}$, el conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ tiene estructura de grupo abeliano aditivo, tal que la composición (en $\mathcal{C}$) se distribuye (por ambos lados) con la suma del $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$.

Ejemplo 2.20. Las categorías de $R-Mod$ y $Mod-R$ son categorías pre-aditivas.

Es claro entonces que con el concepto de categoría preaditiva a la mano, podemos generalizar los dos ejemplos anteriores como sigue:

Ejemplo 2.21. Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva, entonces para cada par de objetos A y B de $\mathcal{C}$, los funtores Hom sufren un cambio en su contradominio, esto es,

$$Hom_{\mathcal{C}}(A,\_\,) : \mathcal{C} \to \mathcal{A}b$$

y

$$Hom_{\mathcal{C}}(\_\,,B) : \mathcal{C} \to \mathcal{A}b$$

Ejemplo 2.22. Sea S un monoide, entonces para que la categoría definida por S sea pre-aditiva, es necesario que $Hom(*,*) = S$ tenga una operación aditiva, bajo la cual es un grupo abeliano, y además que el producto de S distribuya a la suma por ambos lados. Por lo tanto, S es en realidad un anillo asociativo con 1.

Definición 2.6. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías pre-aditivas, un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (covariante o contravariante) se llama **funtor aditivo** si:

$$F(f_1 + f_2) = F(f_1) + F(f_2), \forall f_1, f_2 \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$$

Esta condición nos dice que la función $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{D}}(FA, FB)$ dada por $f \mapsto F(f)$, es un homomorfismo de grupos.

Ejemplo 2.23. Si $M, N \in Mod{-}R$, entonces los funtores $Hom_R(M, \_\,)$ y $Hom_R(\_\,, N)$ son funtores aditivos. En efecto, tenemos que:

$$(f_1 + f_2)_*(g) = (f_1 + f_2)g = f_1g + f_2g = (f_1)_*(g) + (f_2)_*(g) = ((f_1)_* + (f_2)_*)(g)$$

Lo que implica que $(f_1 + f_2)_* = (f_1)_* + (f_2)_*$, que es la condición para que el funtor sea aditivo. Análogamente se ve que $(f_1 + f_2)^* = (f_1)^* + (f_2)^*$.

Nótese que nuevamente usamos el hecho de que la composición distribuye a la suma, por lo que vemos que dicha condición impuesta a una categoría pre-aditiva es de suma importancia.

De manera completamente similar se puede verificar la veracidad del siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.24. Si $\mathcal{C}$ es una categoría pre-aditiva, entonces para cada $A, B \in obj(\mathcal{C})$, los funtores $Hom_{\mathcal{C}}(A, \_\,)$ y $Hom_{\mathcal{C}}(\_\,, B)$ son funtores aditivos.

Ejemplo 2.25. Sean R y R' anillos con 1, por el ejemplo 2.3.3 sabemos que ambos definen dos categorías pre-aditivas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, respectivamente, donde $obj(\mathcal{C}) = \{*\}$, $Hom_{\mathcal{C}}(*,*) = R$ (con la composición como el producto de R), $obj(\mathcal{D}) = \{*'\}$ y $Hom_{\mathcal{D}}(*',*') = R'$ (con la composición como el producto de R').

Así que un funtor covariante aditivo $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ debe enviar el objeto $*$ en el objeto $*'$ y a cada $r \in R$ en $F(r) = r' \in R'$ de tal forma que:

(i) F respeta las composiciones, es decir, $F(r_1r_2) = F(r_1)F(r_2)$ para todo $r_1, r_2 \in R$.

(ii) F manda identidades en identidades, es decir, $F(1_R) = 1_{R'}$.

(iii) F abre sumas de homomorfismos, es decir, $F(r_1 + r_2) = F(r_1) + F(r_2)$ para todo $r_1, r_2 \in R$.

En resumen, F es un funtor covariante aditivo si y sólo si F es un homomorfismo de anillos con 1.

De forma similar se puede verificar que si F es contravariante, entonces F es aditivo si y sólo si F es un anti-homomorfismo de anillos con 1.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría preaditiva, entonces para cada par de objetos A y B en $\mathcal{C}$, el grupo abeliano $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ contiene un único elemento neutro aditivo, el cual podemos denotar como $\theta_{A,B}$.

Proposición 2.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva, y sean $A, B \in obj\mathcal{C}$ y $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$. Entonces para cualquier objeto X de $\mathcal{C}$ se cumplen las siguientes igualdades:*

(i) $\theta_{B,X} f = \theta_{A,X}$.

(ii) $f\theta_{X,A} = \theta_{X,B}$.

Demostración. Probamos la igualdad (i) y la otra es análoga. En vista de que $\theta_{B,X}$ es neutro, y $\mathcal{C}$ es preaditiva, vemos que se cumplen las siguientes igualdades:

$$\theta_{B,X} f = (\theta_{B,X} + \theta_{B,X}) f = \theta_{B,X} f + \theta_{B,X} f$$

La propiedad (i) se sigue entonces por la Ley de la cancelación de la suma del grupo abeliano $Hom_{\mathcal{C}}(A, X)$. □

Las propiedades demostradas en la proposición anterior no dicen otra cosa sino que, en categorías pre-aditivas, al componer el neutro aditivo de cada conjunto Hom, por cualquiera de los dos lados, el resultado es el neutro aditivo del conjunto Hom correspondiente.

Si usáramos la notación 0 para estos neutros aditivos, entonces estas propiedades se pueden escribir de manera más simple como:

$$0f = 0 \ \text{ y } \ f0 = 0$$

2.4. Morfismos Especiales

Muchas clases especiales de homomorfismos en grupos, R-módulos, etc. se pueden estudiar en categorías arbitrarias. Es de esperarse que no en todas las categorías, estas generalizaciones coincidan con lo ordinario.

Definición 2.7. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Si usamos la notación funcional por la izquierda, entonces f es llamado:

(i) Un **monomorfismo** si para cada $D \in obj(\mathcal{C})$ y cada $g, h \in Hom_{\mathcal{C}}(D, A)$ se cumple la siguiente implicación:

$$fg = fh \Rightarrow g = h$$

Esto es, si f es cancelable por la izquierda.

(ii) Un **epimorfismo** si para cada $D \in obj(\mathcal{C})$ y cada $g, h \in Hom_{\mathcal{C}}(B, D)$ se cumple la siguiente implicación:

$$gf = hf \Rightarrow g = h$$

Esto es, si f es cancelable por la derecha.

(iii) Un **bimorfismo** si f es monomorfismo y epimorfismo.

(iv) Una **retracción** si existe $g : B \to A$ (en $\mathcal{C}$) tal que $fg = 1_B$, esto es, si f es invertible por la derecha.

(v) Una **corretracción** si existe $g : B \to A$ (en $\mathcal{C}$) tal que $gf = 1_A$, esto es, si f es invertible por la izquierda.

(vi) Un **isomorfismo** si f es una retracción y corretracción.

Observaciones.

(i) En muchas ocasiones es más conveniente el uso de diagramas para recordar correctamente las definiciones. Por ejemplo, si en vez de usar la notación funcional por la izquierda, usamos la notación funcional por la derecha, entonces la definición de que f sea un monomorfismo debe escribirse como sigue:

“Para cada $g, h \in Hom_{\mathcal{C}}(D, A)$ se cumple que si $gf = hf$, entonces $h = g$”

Esto es, ¡si f es cancelable por la derecha! y claramente esto puede ser causa de confusión.

Para evitar ésto, resulta más conveniente pensar que f es un monomorfismo si siempre que un par de morfismos que “le llegan a f”, son tales que ambas composiciones son iguales, entonces los dos morfismos deben ser iguales. Es suficiente entonces con recordar que la única forma en que ambas composiciones coincidan en el siguiente diagrama, es cuando $g = h$:

$$D \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$$

De igual forma, resulta más conveniente pensar que un morfismo f es un epimorfismo si siempre que un par de morfismos que "salen de f", son tales que ambas composiciones son iguales, entonces los dos morfismos deben ser iguales. Es suficiente entonces con recordar que la única forma en que ambas composiciones coincidan en el siguiente diagrama, es cuando $g = h$:

$$A \xrightarrow{f} B \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} D$$

(ii) Si recordamos la definición de la categoría dual, podemos decir que los conceptos de monomorfismo y epimorfismo se pueden obtener uno a partir del otro, invirtiendo las flechas en cada definición, y es por esto que se dice que monomorfismo y epimorfismo, son conceptos duales. De la misma forma, los conceptos de retracción y corretracci'on también son conceptos duales.

En general, para dualizar un concepto, es necesario invertir todas las flechas que intervengan en la definición, así como sustituir los objetos por sus duales. Por ejemplo, el concepto de bimorfismo es "ser monomorfismo y epimorfismo", por lo que el concepto dual de bimorfismo sería "ser epimorfismo y monomorfismo" que en este caso, coincide con el mismo concepto de bimorfismo. Decimos entonces que este concepto es **autodual**. Igualmente se tiene que el concepto de isomorfismo, es autodual.

Finalmente mencionamos que es una práctica común, mas no generalizada, anteponer el prefijo "co" al nombre asignado a un concepto, cuando éste es dualizado. Por ejemplo, retracción y correctracción.

En la siguiente proposición resumimos las principales propiedades de estos morfismos.

Proposición 2.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ morfismos en $\mathcal{C}$. Entonces:*

(i) Si f y g son monomorfimos (epimorfismos, bimorfismos), entonces gf también es monomorfismo (epimorfismo, bimorfismo).

(ii) Si gf es epimorfismo, entonces g es epimorfismo.

(iii) Si gf es monomorfismo, entonces f es monomorfismo.

(iv) Si f es una retracción, entonces f es un epimorfismo.

(v) Si f es una corretracción, entonces f es un monomorfismo.

(vi) Si f es un isomorfismo, entonces f es un bimorfismo.

(vii) Si f es un isomorfismo y $\alpha : B \to A$ y $\beta : B \to A$ son tales que $f\alpha = 1_B$ y $\beta f = 1_A$, entonces $\alpha = \beta$.

Demostración. (i) Supongamos que f y g son monomorfismos, y sean α y β tales que $(gf)\alpha = (gf)\beta$, o lo que es lo mismo, $g(f\alpha) = g(f\beta)$; como g es monomorfismo, esto implica que $f\alpha = f\beta$ y como f es monomorfismo, se sigue entonces que $\alpha = \beta$. La segunda parte es análoga y la tercera parte es consecuencia de las dos primeras.

(ii) Supongamos que gf es epimorfismo y sean α y β tales que $\alpha g = \beta g$, de donde $(\alpha g)f = (\beta g)f$ o lo que es lo mismo $\alpha(gf) = \beta(gf)$, y como gf es epimorfismo, se sigue entonces que $\alpha = \beta$.

(iii) Supongamos que gf es monomorfismo y sean α y β tales que $f\alpha = f\beta$, de donde $g(f\alpha) = g(f\beta)$ o lo que es lo mismo $(gf)\alpha = (gf)\beta$, y como gf es monomorfismo, se sigue entonces que $\alpha = \beta$.

(iv) Supongamos que f es una retracción y sea $h : B \to A$ tal que $fh = 1_B$. Suponiendo que $\alpha f = \beta f$, entonces $(\alpha f)h = (\beta f)h$ o lo que es lo mismo, $\alpha(fh) = \beta(fh)$, es decir, $\alpha 1_B = \beta 1_B$ y de aquí que $\alpha = \beta$.

(v) Es análoga a (iv).

(vi) Es consecuencia inmediata de (iv) y (v).

(vii) Tenemos la siguiente serie de igualdades:

$$\alpha = 1_A\alpha = (\beta f)\alpha = \beta(f\alpha) = \beta 1_B = \beta$$

□

Observación:
En vista del último inciso de la proposición anterior, vemos que f es un isomorfismo si y sólo si f es invertible en $\mathcal{C}$, es decir, si existe un único $g : B \to A$ tal que $gf = 1_A$ y $fg = 1_B$. Este morfismo se denota como $g = f^{-1}$.

Definición 2.8. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean A y B objetos de $\mathcal{C}$. Decimos que A y B son **isomorfos**, como objetos de la categoría $\mathcal{C}$, si existe un isomorfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$.

En categorías de R-módulos tenemos las siguientes propiedades:

Proposición 2.3. *Sea $f : M \to N$ un morfismo en R-Mod o R-mod. Entonces:*

(i) f es un monomorfismo si y sólo si f es inyectivo.

(ii) f es un epimorfismo si y sólo si f es suprayectivo.

(iii) f es un isomorfismo si y sólo si f es biyectivo, es decir, si y sólo si f es bimorfismo.

Demostración. (i) "$\Rightarrow$" Supongamos que f no es inyectivo, es decir, existen $m_1, m_2 \in M$ tales que $f(m_1) = f(m_2)$ y $m_1 \neq m_2$. Definimos entonces $h_1 : R \to M$ tal que $h_1(r) = rm_1$ y $h_2 : R \to M$ tal que $h_2(r) = rm_2$. Es fácil ver que h_1 y h_2 son R-homomorfismos para los cuales se cumple que $fh_1 = fh_2$ pero $h_1 \neq h_2$, lo que demuestra que f no es monomorfismo.

"$\Leftarrow$" Supongamos que f es inyectivo y sean $g, h : L \to M$ tales que $fg = fh$, de aquí que para todo $x \in L$ se cumple que $(fg)(x) = (fh)(x)$, es decir, $f(g(x)) = f(h(x))$ y como f es inyectiva, entonces $g(x) = h(x)$, esto es, $g = h$, lo que prueba que f es monomorfismo.

(ii) "$\Rightarrow$" Si f no es suprayectivo, entonces $N/Imf \neq \{0\}$ y la proyección canónica $\pi : N \to N/Imf$ no es el homomorfismo nulo. Pero entonces si $0 : N \to N/Imf$ es el homomorfismo nulo, entonces es claro que $0f = \pi f = 0$, pero $0 \neq \pi$, lo que prueba que f no es epimorfismo.

"$\Leftarrow$" Supongamos que f es suprayectivo y sean $g, h : N \to L$ tales que $gf = hf$; entonces para cada $n \in N$ existe $m \in M$ tal que $f(m) = n$ y de aquí que $g(n) = g(f(m)) = h(f(m)) = h(n)$, lo que demuestra que $g = h$ y por lo tanto, f es epimorfismo.

(iii) "$\Rightarrow$" Si f es isomorfismo, entonces f es bimorfismo y por (i) y (ii), f es biyectivo.

"$\Leftarrow$" Si f es biyectivo, entonces f existe la función inversa f^{-1} y es fácil ver que ésta es R-homomorfismo, lo que implica que f^{-1} es un morfismo en R-Mod, y de aquí que f es isomorfismo. $\square$

Existe otro tipo de morfismos especiales en categorías, los cuales definimos a continuación.

Definición 2.9. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{C}$, decimos que:

(i) f es un **morfismo cero izquierdo** si para cualesquier par de morfismos que "le lleguen a f", las dos composiciones coinciden, esto es, para todo $g, h : D \to A$ en $\mathcal{C}$, necesariamente se cumple que $fg = fh$.

(ii) f es un **morfismo cero derecho** si para cualesquier par de morfismos que "salen de f", las dos composiciones coinciden, esto es, para todo $g, h : B \to D$ en $\mathcal{C}$, necesariamente se cumple que $gf = hf$.

(iii) f es un **morfismo cero**, si f es morfismo cero izquierdo y derecho.

Al igual que con los otros morfismos especiales, en el caso de categorías de R-módulos, el concepto de morfismo cero se reduce a lo usual.

Proposición 2.4. *En la categoría R-Mod o R-mod, un R-homomorfismo $f : M \to N$ es un morfismo cero si y sólo si $Imf = \{0\}$.*

Demostración. Supongamos que f es morfismo cero y consideremos los R-homomorfismos 1_N y 0_N, la identidad y el homomorfismo nulo, respectivamente. Como f es morfismo cero, entonces $1_N f = 0_N f$ lo que implica que para todo $m \in M$ se cumple que $f(m) = 0$ y de aquí que $Imf = \{0\}$.

Recíprocamente, supongamos que $Imf = \{0\}$, y sean $g, h : N \to L$, entonces para cada $m \in M$ se tiene que $g(f(m)) = g(0) = 0$ y también $h(f(m)) = h(0) = 0$ es decir, $g(f(m)) = h(f(m))$, de donde $gf = hf$ lo que demuestra que f es morfismo cero derecho. Por otro lado, si $\alpha, \beta : K \to M$, entonces para cada $x \in K$ se cumple que $f(\alpha(x)) = 0 = f(\beta(x))$, es decir, $f\alpha = f\beta$ lo que demuestra que f es morfismo cero izquierdo. □

2.5. Objetos Especiales

Existen también ciertos objetos especiales definidos en categorías arbitrarias, que al igual que con los morfismos anteriores, en categorías de R-módulos coinciden con lo ordinario, pero no así en otras categorías.

Definición 2.10. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sea A un objeto de $\mathcal{C}$. Entonces:

(i) A es llamado **objeto inicial** de $\mathcal{C}$ si para cada objeto B de $\mathcal{C}$, existe exactamente un morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$.

(ii) A es llamado **objeto terminal** de $\mathcal{C}$ si para cada objeto B de $\mathcal{C}$, existe exactamente un morfismo $f : B \to A$ en $\mathcal{C}$.

(iii) A es llamado **objeto cero** de $\mathcal{C}$ si A es objeto inicial y terminal.

Ejemplo 2.26. Si $\mathcal{C} = Sets$, entonces $A = \emptyset$ es el único objeto inicial, mientras que $A = \{a\}$, cualquier conjunto singulete, son objetos terminales. Por ende, en esta categoría no existe el objeto cero.

Ejemplo 2.27. Si $\mathcal{C} = R - Mod$, entonces el R-módulo $\{0\}$ es el único objeto inicial y terminal, y por ende, el 'unico objeto cero.

Las propiedades esenciales de estos objetos se enuncian a continuación.

Proposición 2.5. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean A, B, D, Z objetos de $\mathcal{C}$. Entonces:*

(i) Todos los objetos iniciales (terminales, cero) de $\mathcal{C}$, son isomorfos.

(ii) Si A es un objeto inicial, entonces cada $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$ es un morfismo cero derecho y cada $g : D \to A$ en $\mathcal{C}$ es una retracción.

(iii) Si A es un objeto terminal, entonces cada $f : B \to A$ en $\mathcal{C}$ es un morfismo cero izquierdo y cada $g : A \to D$ en $\mathcal{C}$ es una corretracción.

(iv) Si Z es un objeto cero, entonces el único morfismo $Z \to B$ es una corretracción y el único morfismo $B \to Z$ es una retracción.

(v) Si Z es un objeto cero, entonces los únicos morfismos $f : Z \to B$, $g : A \to Z$ son morfismos cero. Si definimos $fg : A \to B$, entonces fg también es morfismo cero. En particular, $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \neq \emptyset$ y hay un único morfismo cero $A \to B$, el cual es denotado como $0_{A,B}$.

Demostración. (i) Supongamos que A y B son objetos iniciales en $\mathcal{C}$. Por ser A objeto inicial, existe un único morfismo $f : A \to B$, y un único morfismo $A \to A$, pero este último debe ser entonces la identidad 1_A. De igual forma, por ser B objeto inicial, existe un único morfismo $g : B \to A$ y un único morfismo $B \to B$, el cual debe ser la identidad 1_B.

Pero entonces, ya que $gf : A \to A$, entonces necesariamente $gf = 1_A$ y análogamente se sigue que $fg = 1_B$, probando de esta forma que A es isomorfo a B.

De igual manera se prueba que los objetos terminales son isomorfos, y el hecho de que los objetos cero sean isomorfos es consecuencia de estos dos casos.

(ii) Supongamos que A es objeto inicial y sean $f : A \to B$ y $g, h : B \to D$. Ya que existe un único morfismo $A \to D$, entonces es claro que $gf = hf$, lo que prueba que f es morfismo cero derecho.

Ahora sea $g : D \to A$, como A es objeto inicial existe un único morfismo $f : A \to D$, y por la misma razón existe un único morfismo $A \to A$, el cual debe ser la identidad 1_A. Pero entonces $gf = 1_A$ lo que demuestra que g es una retracción en $\mathcal{C}$.

(iii) La prueba de este inciso es completamente análoga a la de (ii).

(iv) Supongamos que Z es un objeto cero, por ser Z objeto terminal y por el inciso (iii), tenemos que el único morfismo $Z \to B$ es una corretracción, y por ser Z objeto inicial y por el inciso (ii), el único morfismo $B \to Z$ es una retracción.

(v) Supongamos que Z es un objeto cero, entonces existen únicos morfismos $f : Z \to B$ y $g : A \to Z$. Por el inciso (ii) tenemos que f es morfismo cero derecho y si $\alpha, \beta : D \to Z$, por ser Z objeto terminal, se sigue que $\alpha = \beta$ y de aquí es obvio que $\alpha f = \beta f$, lo que demuestra que f es morfismo cero izquierdo. Por lo tanto f es morfismo cero, y de igual forma se prueba que g es morfismo cero.

Para probar que fg es morfismo cero, sean $\alpha, \beta : B \to D$, por ser f morfismo cero, se sigue que $\alpha f = \beta f$, y de aquí que $\alpha fg = \beta fg$, lo que prueba que fg es morfismo cero derecho. Análogamente se ve que fg es morfismo cero izquierdo.

Para terminar la prueba, solamente nos resta demostrar la unicidad del morfismo cero en $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, para lo cual suponemos que $\theta : A \to B$ es otro morfismo cero. En vista de que Z es objeto terminal, debe existir un único morfismo $h : B \to Z$ y por la misma razón debe existir un único morfismo $A \to Z$, lo que implica que $h\theta = g$ y de aquí que $fh\theta = fg$. Por otro lado, ya que θ es morfismo cero, entonces viendo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\theta"] & B \arrow[r, shift left, "1_B"] \arrow[r, shift right, "fh"'] & B \end{tikzcd}$$

es claro que $1_B\theta = fh\theta$, lo que junto con la igualdad anterior implica que $\theta = fg$.

En el caso cuando $\mathcal{C}$ es una categoría pre-aditiva, entonces cada conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ es un grupo abeliano aditivo, por lo que existe un elemento neutro aditivo, y es de esperarse que éste coincida con el morfismo cero $0_{A,B}$ de la proposición anterior. □

En efecto, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.6. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría pre-aditiva y con objeto cero, y sean A y B objetos de $\mathcal{C}$, si $\theta_{A,B}$ denota el neutro aditivo del grupo abeliano $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $0_{A,B}$*

denota el morfismo cero definido en el inciso (v) de la proposición anterior, entonces:

$$\theta_{A,B} = 0_{A,B}$$

Demostración. De acuerdo a la unicidad demostrada en el inciso (v) de la proposición anterior, es suficiente con probar que $\theta_{A,B}$ es un morfismo cero en $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.

En efecto, se sigue por la proposición 2.1 que si $f, g : B \to D$, entonces $f\theta_{A,B} = \theta_{A,D}$ y $g\theta_{A,B} = \theta_{A,D}$ y de aquí que $f\theta_{A,B} = g\theta_{A,B}$ lo que demuestra que $\theta_{A,B}$ es morfismo cero derecho y análogamente se prueba que $\theta_{A,B}$ es morfismo cero izquierdo. □

Notaciones:

- Debido a que todos los objetos cero son isomorfos, es costumbre denotarlo simplemente como 0.

- Debido al inciso (v) de la proposición 2.5, si $\mathcal{C}$ es una categoría con objeto cero, entonces para cualesquier par de objetos A y B de $\mathcal{C}$ existe un único morfismo cero $0_{A,B}$, el cual se denota simplemente como 0.

- Si $\mathcal{C}$ es una categoría con objeto cero 0, entonces para cualesquier par de objetos A y B de $\mathcal{C}$, existen únicos morfismos $0 \to B$ y $A \to 0$, los cuales son los morfismos cero correspondientes. En este par de casos, es costumbre omitir la notación explicada en el punto anterior, y únicamente escribir $0 \to B$ y $A \to 0$, ya que se sobreentiende a que morfismos nos referimos.

- Cuando la categoría $\mathcal{C}$ es pre-aditiva y tiene objeto cero, vimos en la proposición 2.6, que el neutro aditivo $\theta_{A,B}$ coincide con el morfismo cero $0_{A,B}$ definido en el inciso (v) de la proposición 2.5. Es costumbre denotar a este morfismo común, simplemente como 0, sin olvidar que tiene tanto las propiedades del neutro aditivo como las del morfismo cero.

2.6. Núcleos y conúcleos

Un concepto que surge comúnmente en álgebra lineal, teoría de grupos y teoría de anillos, es el de núcleo y en teoría de módulos, vimos además el de conúcleo.

Para definir estos conceptos en categorías arbitrarias surge el mismo problema que con los morfismos y objetos especiales: las definiciones usuales usan elementos de un conjunto, y esto no es categórico. En el caso del tema que estamos discutiendo, recordemos que el núcleo está formado por todos los elementos del dominio, cuya imagen es el neutro aditivo del contradominio (sean espacios vectoriales, grupos, anillos, etc.); para poder encontrar una definición que pueda ser transportada a categorías, necesitamos hallar una definición equivalente la cual no use elementos, sino solamente los objetos y los morfismos.

Efectivamente tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.7. *Sean M y N R-módulos derechos y sea $f : M \to N$ un R-homomorfismo. Para un R-submódulo $K \leq M$ denotemos por $i : K \to M$ a la inclusión natural. Son equivalentes:*

(i) $K = ker f$.

(ii) $fi = 0$ *y si L es otro R-módulo y $j : L \to M$ es R-homomorfismo tal que $fj = 0$, entonces existe un único R-homomorfismo $g : L \to K$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, dashed, "\exists ! g"'] \arrow[d, "j"] & \\ K \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

es decir, tal que $ig = j$.

Demostración. "$\Rightarrow$" Si $K = ker f$, entonces para todo $x \in K$ se cumple que $(fi)(x) = f(x) = 0$ lo que implica que $fi = 0$.

Si suponemos que $fj = 0$, entonces para todo $x \in L$ se cumple que $j(x) \in M$ es tal que $f(j(x)) = 0$, es decir, $j(x) \in K$. Por lo tanto, podemos correstringir el R-homomorfismo j como $g : L \to K$ de tal forma que $g(x) = j(x)$ para cada $x \in L$. Por lo tanto, para todo $x \in L$ se verifica que:

$$(gi)(x) = g(x) = j(x)$$

con lo que queda demostrado que $gi = j$. Pero además, si $h : L \to K$ es otro R-homomorfismo tal que $hi = j$, entonces para cada $x \in L$ se cumple que $(hi)(x) = j(x)$, es decir, $h(x) = g(x)$, lo que demuestra que $h = g$ y g es único.

"$\Leftarrow$" De la igualdad $fi = 0$ se sigue que para todo $x \in K$ se cumple que $f(x) = 0$, lo que demuestra que $K \subset ker f$.

Por otro lado, si $j : ker f \to M$ es la inclusión natural, entonces es claro que $fj = 0$ y por lo tanto, debe existir un único R-homomorfismo $g : ker f \to K$ tal que $gi = j$, lo que significa que para todo $x \in ker f$ se cumple que $(gi)(x) = j(x)$ y de aquí que $x = g(x) \in K$, con lo cual queda demostrado que $ker f \subset K$ y por lo tanto, $K = ker f$. □

Es evidente que la equivalencia establecida en la proposición anterior si es factible de ser generalizada al contexto de categorías, siempre y cuando sean categorías que contengan morfismos cero entre cualesquier par de objetos. Debido al resultado de la proposición 2.5 inciso (v), sabemos que esto es cierto si la categoría contiene objeto cero. Esta es entonces una condición necesaria para poder hablar de núcleos en categorías.

Definición 2.11. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero y sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Definimos el **núcleo** de f como una pareja (K, i) donde K es un objeto de $\mathcal{C}$ e $i : K \to A$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ y son tales que satisfacen la siguiente propiedad universal:

(i) $fi = 0$.

(ii) Dada cualquier otra pareja (L, j) donde L es un objeto de $\mathcal{C}$ y $j : L \to A$ es un morfismo de $\mathcal{C}$ y son tales que $fj = 0$, entonces existe un único morfismo $g : L \to K$ en $\mathcal{C}$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, dashed, "\exists! g"'] \arrow[d, "j"] & \\ K \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Por la proposición 2.7, es obvio que en la categoría R-Mod (Mod-R), si $f : M \to N$, $K = ker f$ e $i : K \to M$ es la inclusión natural, entonces (K, i) es un núcleo (en el sentido categórico) para f.

Una ganancia al tener la definición categórica de núcleo, es que podemos dualizarla fácilmente para obtener la definición categórica de conúcleo.

Definición 2.12. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero y sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Definimos el **conúcleo** de f como una pareja (L, π) donde L es un objeto de $\mathcal{C}$ y $\pi : B \to L$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ y son tales que satisfacen la siguiente propiedad universal:

(i) $\pi f = 0$.

(ii) Dada cualquier otra pareja (E, ρ) donde E es un objeto de $\mathcal{C}$ y $\rho : B \to E$ es un morfismo de $\mathcal{C}$ y son tales que $\rho f = 0$, entonces existe un único morfismo $g : L \to E$ en $\mathcal{C}$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\rho"'] & L \arrow[dl, dashed, "\exists ! g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Lo primero que debemos verificar es que en la categoría R-Mod (Mod-R), el conúcelo definido en la unidad anterior, efectivamente corresponde al conúcleo de la definición 2.6.2. En efecto, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.8. *Sean $M, N \in R - Mod$ y $f : M \to N$ un R-homomorfismo. Si $L = N/Imf$ y $\pi : N \to L$ es la proyección canónica, entonces (L, π) es un conúcleo de f.*

Demostración. Lo primero que debemos ver es que $\pi f = 0$, lo cual es obvio, ya que si $m \in M$, entonces $\pi(f(m)) = f(m) + Imf = Imf = \overline{0}$.

Ahora suponemos que (E, ρ) son tales que $\rho : N \to E$ y $\rho f = 0$, y esto último implica que $Imf \subset ker\rho$, por lo que podemos aplicar el teorema del factor para ver que existe un único $\lambda : N/Imf \to E$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E \\ & N/Imf \arrow[ur, dashed, "\exists ! \lambda"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $\lambda\pi = \rho$, pero precisamente esto demuestra que la pareja (L, π) satisface la propiedad universal del conúcleo de f:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\rho"'] & L \arrow[dl, dashed, "\exists ! \lambda"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

con lo cual queda terminada la prueba. □

En vista de que el núcleo y conúcleo satisfacen cierta propiedad universal, entonces cuando existen deben ser únicos salvo isomorfismo. En efecto, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.9. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero, y sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Entonces:*

(i) Si (K, i) y (L, j) son núcleos de f, entonces existe un único isomorfismo $\alpha : K \to L$ tal que $j\alpha = i$.

(ii) Si (L, π) y (E, ρ) son conúcleos de f, entonces existe un único isomorfismo $\alpha : L \to E$ tal que $\alpha\pi = \rho$.

Demostración. (i) Ya que (K, i) es un núcleo de f entonces $fi = 0$ y como (L, j) es núcleo de f, entonces existe un único morfismo $\alpha : K \to L$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, dashed, "\exists!\alpha"'] \arrow[d, "i"] & \\ L \arrow[r, "j"] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Invirtiendo los papeles vemos que existe un único morfismo $\beta : L \to K$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, dashed, "\exists!\beta"'] \arrow[d, "j"] & \\ K \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Ahora bien, por la propiedad universal del núcleo (K, i), sabemos que debe existir un único morfismo $\lambda : K \to K$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, dashed, "\exists!\lambda"'] \arrow[d, "i"] & \\ K \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

el cual claramente es $\lambda = 1_K$, así que si probamos que $i\beta\alpha = i$, entonces $\beta\alpha = 1_K$. En efecto, tenemos que:

$$i\beta\alpha = j\alpha = i$$

Análogamente se prueba que $\alpha\beta = 1_L$ con lo cual queda demostrado que α (y también β) es un isomorfismo.

(ii) Se sigue por dualización de la demostración de (i).

Para finalizar, sabemos que en R-Mod (Mod-R) la inclusión natural y la proyección canónica, son R-monomorfismo y R-epimorfismo, respectivamente, por lo que esperamos que en general se tengan estas mismas propiedades en categorías arbitrarias. □

En efecto, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.10. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero y sean $A, B \in obj(\mathcal{C})$ y $f : A \to B$. Si (K, i) es un núcleo de f y (L, π) es un conúcleo de f, entonces:*

(i) i es monomorfismo en $\mathcal{C}$.

(ii) π es epimorfismo en $\mathcal{C}$.

Demostración. (i) Supongamos que $g, h : D \to K$ son tales que $ig = ih$. Entonces tenemos que:

$$f(ig) = (fi)g = 0g = 0$$

Podemos entonces usar la propiedad universal del núcleo de f para ver que existe un único $\lambda : D \to K$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, dashed, "\exists!\lambda"'] \arrow[d, "ig"] & \\ K \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Pero es claro que tanto g como h hacen que conmute el diagrama anterior, por lo que la unicidad implica que $g = h$, probando de esta forma que i es monomorfismo en $\mathcal{C}$.

(ii) Se sigue por dualización de la prueba de (i). □

2.7. Sucesiones Exactas

En esta sección definimos las sucesiones exactas, y estudiamos muy en especial, las sucesiones exactas cortas. En secciones más adelante utilizamos estos conceptos para definir funtores exactos, izquierdos o derechos.

Definición 2.13. Sean $A, B, C \in R - Mod$ y sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ R-homomorfismos. Decimos que la siguiente cadena:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

es una **sucesión cero**, si se cumple que $gf = 0$, o lo que es lo mismo, si $Imf \subset kerg$.

Definición 2.14. Sean $A, B, C \in R - Mod$ y sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ R-homomorfismos. Decimos que la siguiente cadena:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

es una **sucesión exacta**, si se cumple que $Imf = kerg$.

Definición 2.15. Sea $\{A_i \mid i \in \mathbb{Z}\} \subset R - Mod$ una familia de R-módulos y supongamos que para cada $i \in \mathbb{Z}$ tenemos R-homomorfismos $f_i : A_i \to A_{i+1}$. Decimos que la siguiente cadena:

$$\cdots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

es una **sucesión exacta**, si se cumple que $Imf_{i-1} = kerf_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Para poder dar una definición de sucesión exacta en categorías, necesitamos encontrar una equivalencia que utilice conceptos categóricos. Es claro que $Imf \subset kerg$ equivale a la igualdad $gf = 0$, y ahora buscamos la equivalencia de la otra contención, para lo cual vemos que si $i : kerg \to B$ es la inclusión, entonces la igualdad $gf = 0$ implica, por la propiedad universal del núcleo, la existencia de un único R-homomorfismo $h : A \to kerg$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "\exists! h"'] & & B \arrow[r, "g"] & C \\ & kerg \arrow[ur, "i"'] & & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Pero si recordamos que h es la correstricción de f, es decir, $h(a) = f(a)$ para todo $a \in A$, entonces tenemos que $kerg \subset Imf$ es equivalente a que para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $b = f(a) = h(a)$, es decir, h es epimorfismo.

Con esta idea hacemos la siguiente:

Definición 2.16. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero y núcleos, decimos que la sucesión:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

es exacta en $\mathcal{C}$ si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) $gf = 0$.

(ii) Si (K, i) es un núcleo de g y h es el único homomorfismo que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "\exists! h"'] & & B \arrow[rr, "g"] & & C \\ & K \arrow[ur, "i"'] & & & \end{tikzcd}$$

entonces h es un epimorfismo en $\mathcal{C}$.

En realidad no trabajaremos las sucesiones exactas con esta generalidad, pero quisimos dar la definición categórica con el propósito de exponer un ejemplo más de cómo un concepto de R-módulos se puede traducir a un concepto en categorías.

En lo que sigue de esta sección, trabajaremos en la categoría de R-módulos.

Ejemplo 2.28. La sucesión $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ es exacta si y sólo si α es monomorfismo.

En efecto, la sucesión es exacta si y sólo si es exacta en A, es decir si y sólo si $ker\alpha = 0$.

Ejemplo 2.29. La sucesión $B \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si β es epimorfismo.

En efecto, la sucesión es exacta si y sólo si es exacta en A, es decir si y sólo si $Im\beta = A$.

Ejemplo 2.30. La sucesión $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si f es un R-isomorfismo.

En efecto, de acuerdo a los dos ejemplos anteriores, la exactitud se cumple si y sólo si f es monomorfismo y epimorfismo.

Con cada R-homomorfismo $f : M \to N$, podemos construir una sucesión exacta como vemos a continuación.

Ejemplo 2.31. Sea $K = kerf$ e $i : K \to M$ la inclusión natural y sea $L = cokerf$ y $\pi : N \to L$ la proyección canónica, entonces la sucesión:

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} L \longrightarrow 0$$

es exacta.

En efecto, tenemos que la sucesión es exacta en:

(i) K, ya que i es monomorfismo.

(ii) M, ya que $Imi = K = kerf$.

(iii) N, ya que $Imf = ker\pi$.

(iv) L, ya que π es epimorfismo.

Un tipo muy importante de sucesiones exactas son las que definimos a continuación:

Definición 2.17. Una **sucesión exacta corta** es una sucesión exacta de la forma:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

De acuerdo a la definición de sucesión exacta, se sigue que la sucesión anterior es exacta si y sólo si:

(i) α es monomorfismo.
(ii) β es epimorfismo.
(iii) $Im\alpha = ker\beta$.

Ejemplo 2.32. Sea $N \leq M_R$, entonces la sucesión:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta, donde i es la inclusión y π es la proyección canónica.

De hecho, vemos a continuación que el ejemplo anterior es el prototipo de toda sucesión exacta corta.

En efecto, si la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

entonces como α es monomorfismo, se sigue que $Im\alpha \approx A$, y como β es epimorfismo, entonces $C \approx B/ker\beta$ y por el inciso (iii) anterior, $C \approx B/Im\alpha$. Por lo tanto, tenemos que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "1_B"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Im\alpha \arrow[r, "i"'] & B \arrow[r, "\pi"'] & B/Im\alpha \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo con renglones exactos, y donde los homomorfismos que definen las tres columnas, son R-isomorfismos.

En efecto, es claro que el primer cuadrado es conmutativo, y el segundo cuadrado también es conmutativo, ya que $\theta : C \to B/Im\alpha$ está definido por la regla $c = \beta(b) \mapsto b + Im\alpha$.

En el manejo de diagramas como el anterior, hay una técnica de demostración que es muy útil conocida como *cacería*, y nada mejor que un ejemplo para explicar el método.

Teorema 2.11. *(***Lema del Tres***)*
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"'] & B' \arrow[r, "\beta'"'] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces:
(i) Si f y h son monomorfismos, entonces g es monomorfismo.
(ii) Si f y h son epimorfismos, entonces g es epimorfismo.
(iii) Si f y h son isomorfismos, entonces g es isomorfismo.

Demostración. (i) Supongamos que f y h son monomorfismos, y sea $b \in kerg$, es decir, $g(b) = 0$, entonces:

$$(h\beta)(b) = (\beta' g)(b) = \beta'(0) = 0$$

Y como h es monomorfismo, entonces $\beta(b) = 0$ de donde $b \in ker\beta = Im\alpha$ lo que implica que $b = \alpha(a)$ para algún $a \in A$. Por lo tanto:

$$(\alpha' f)(a) = g(\alpha(a)) = g(b) = 0$$

Y como $\alpha' f$ es monomorfismo, entonces $a = 0$, lo que implica finalmente que $b = \alpha(a) = 0$, demostrando así que g es monomorfismo.

(ii) Supongamos que f y h son epimorfismos y sea $b' \in B'$, como h es epimorfismo, entonces existe $c \in C$ tal que $h(c) = \beta'(b')$ y como β es epimorfismo entonces existe $b \in B$ tal que $\beta(b) = c$, y de aquí que:

$$\beta'(b') = h(c) = h(\beta(b)) = \beta'(g(b))$$

Por lo tanto, $b' - g(b) \in ker\beta' = Im\alpha'$ y existe $a' \in A'$ tal que $\alpha'(a') = b' - g(b)$, pero como f es epimorfismo, entonces existe $a \in A$ tal que $f(a) = a'$. Por lo tanto tenemos que:

$$b' - g(b) = \alpha'(f(a)) = g(\alpha(a))$$

Y de aquí que $b' = g(\alpha(a)) + g(b) = g(\alpha(a) + b)$ con lo cual queda demostrado que g es epimorfismo.

(iii) Es consecuencia inmediata de (i) y (ii). □

2.8. Sucesiones Exactas que se Escinden

Para motivar la definición de sucesión exacta corta que se escinde, estudiamos el concepto de suma directa en R-Mod, aunque por el momento nos restringimos al caso de suma directa de dos R-módulos, ya que en el siguiente capítulo veremos como se puede generalizar este concepto para familias arbitrarias de R-módulos.

Podemos hablar de dos tipos de suma directa: la interna y la externa, las cuales definimos a continuación.

Definición 2.18. Sea M un R-módulo izquierdo y sean $N, L \leq M$, decimos que M es la **suma directa interna** de N y L si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) $M = N + L$.

(ii) $N \cap L = 0$.

En este caso, usamos la notación $M = N \oplus L$.

Es rutina verificar el siguiente resultado.

Proposición 2.12. *Sea M un R-módulo izquierdo y sean $N, L \leq M$, entonces $M = N \oplus L$ si y sólo si cada $m \in M$ se escribe en forma única como:*

$$m = x + y$$

donde $x \in N$ y $y \in L$.

Definición 2.19. Sean N y L dos R-módulos izquierdos y sea $M = N \times L$ el producto cartesiano de N y L. Entonces M tiene estructura de R-módulo izquierdo si definimos las operaciones coordenada a coordenada, y decimos en este caso, que M es la **suma directa externa** de N y L.

Igual que con la proposición anterior, es rutina verificar el siguiente resultado:

Proposición 2.13. *Sea M un R-módulo izquierdo y sean $N, L \leq M$, entonces hay un R-isomorfismo $f : N \oplus L \to N \times L$ dado por:*

$$f(x + y) = (x, y)$$

Inversamente, si N y L son R-módulos izquierdos y $M = N \times L$, entonces $M = N' \oplus L'$ donde $N' = \{(x, 0) \mid x \in N\}$ y $L' = \{(0, y) \mid y \in L\}$. Además, $N \simeq N'$ y $L \simeq L'$, por lo que $N \times L \simeq N' \oplus L'$.

De esta forma, podemos decir que, salvo isomorfismo, ambos conceptos coinciden por lo que es intrascendente especificar si se trata de una suma directa interna o externa, y simplemente hablamos de suma directa y el contexto mismo nos aclara a que tipo de suma directa nos referimos. En ambos casos se acostumbra usar la notación $N \oplus L$.

Entonces podemos definir un par de R-monomorfismos canónicos llamados inclusiones, $M \xrightarrow{i_M} M \oplus N$ tal que $i_M(x) = (x, 0)$ y $N \xrightarrow{i_N} M \oplus N$ tal que $i_N(y) = (0, y)$.

Asimismo podemos definir un par de R-epimorfismos canónicos llamados proyecciones, $M \oplus N \xrightarrow{\pi_M} M$ tal que $\pi_M(x, y) = x$ y $M \oplus N \xrightarrow{\pi_N} N$ tal que $\pi_M(x, y) = y$.

Además es trivial verificar que se tienen las siguientes igualdades $\pi_M i_M = 1_M$, $\pi_N i_N = 1_N$, $\pi_M i_N = 0$ y $\pi_N i_M = 0$.

Entonces formamos la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i_M} M \oplus N \xrightarrow{\pi_N} N \longrightarrow 0$$

Pero entonces esta sucesión tiene R-homomorfismos de regreso:

$$0 \longrightarrow M \underset{\pi_M}{\overset{i_M}{\rightleftarrows}} M \oplus N \underset{i_N}{\overset{\pi_N}{\rightleftarrows}} N \longrightarrow 0$$

tales que $\pi_M i_M = 1_M$ y $\pi_N i_N = 1_N$.

Esto motiva la siguiente:

Definición 2.20. Decimos que una sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$

se **escinde**, si existen R-homomorfismos de regreso:

$$0 \longrightarrow M \underset{\delta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} K \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} N \longrightarrow 0$$

tales que $\delta\alpha = 1_M$ y $\beta\gamma = 1_N$, es decir, si α es corretracción y β es retracción.

Entonces a través de la suma directa de un par de R-módulos podemos construir sucesiones exactas cortas que se escinden, y de hecho probaremos que éstas son el prototipo de toda sucesión exacta corta que se escinde.

Para ello, necesitamos probar un resultado previo.

Lema 2.14. *Sean M y N un par de R-módulos izquierdos y sean $f : M \to N$ y $g : N \to M$ R-homomorfismos tales que $fg = 1_N$. es decir, f es retracción y g es corretracción, entonces:*

$$M = ker f \oplus Img$$

Además, $N \simeq Img$, es decir, N es isomorfo a un sumando directo de M.

Recíprocamente, si N es isomorfo a un sumando directo de M, entonces existen R-homomorfismos f y g como arriba tales que $fg = 1_N$.

Demostración. Si $x \in ker f \cap Img$, entonces $0 = f(x)$ y existe $y \in N$ tal que $x = g(y)$, de donde, $0 = f(g(y)) = y$ lo que implica que $x = g(0) = 0$, con lo cual hemos probado que $ker f \cap Img = 0$.

Ahora, si $x \in M$, entonces $f(x) \in N$, de donde $fg(f(x)) = f(x)$ y de aquí que $x - gf(x) \in ker f$ y ya que $x = (x - gf(x)) + gf(x)$, esto demuestra que $M = ker f + Img$, probando así que $M = ker f \oplus Img$. Además, como g es monomorfismo, entonces es claro que $N \simeq Img$.

Ahora supongamos que $\alpha : N \to L$ es un R-isomorfismo donde $L \leq M$ es tal que existe $K \leq M$ tal que $M = L \oplus K$, y definimos entonces los R-homomorfimos $f = \alpha^{-1}\pi_L$ y $g = i_L\alpha$ y tenemos entonces que:

$$fg = \alpha^{-1}\pi_L i_L\alpha = \alpha^{-1}\alpha = 1_N$$

con lo que queda concluida la demostración. □

Como consecuencia de este resultado, probaremos en primer lugar, que podemos relajar la definición de sucesión exacta corta que se escinde en el sentido de que no es necesario pedir que existan los dos R-homomorfismos de regreso, sino que la existencia de uno implica la del otro, y en segundo lugar, vemos que toda sucesión exacta corta que se escinde está dada, salvo isomorfismo, a través de una suma directa.

Proposición 2.15. *Consideremos la siguiente sucesión exacta corta:*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$$

Son equivalentes:

(i) f es retracción.

(ii) h es corretracción.

Además en ambos casos, existe un R-isomorfismo $\alpha : B \to A \oplus C$ tal que el siguiente diagrama con renglones exactos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "1_A"] & B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_A"'] & A \oplus C \arrow[r, "\pi_C"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Si f es retracción, entonces existe $g : C \to B$ tal que $fg = 1_C$, y se sigue por el lema anterior que $B = kerf \oplus Img$ y como la sucesión dada es exacta, entonces $kerf = Imh$, de donde $B = Imh \oplus Img$. Como además h es monomorfismo, entonces la correstricción $h_0 : A \to Imh$ es R-isomorfismo. Definimos entonces $\beta : B \to A$ tal que $\beta = h_0^{-1}\pi_{Imh}$ y tenemos que para cada $a \in A$ se cumple:

$$(\beta h)(a) = h_0^{-1}\pi_{Imh}(h(a)) = h_0^{-1}(h(a)) = a$$

lo que prueba que $\beta h = 1_A$, es decir, h es corretracción.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Suponemos que existe $\beta : B \to A$ tal que $\beta h = 1_A$, y nuevamente por el lema anterior tenemos que $B = ker\beta \oplus Imh$ y de aquí que cada $b \in B$ se escribe en forma única como $b = x + y$ con $x \in ker\beta, y \in Imh = kerf$, de donde:

$$f(b) = f(x+y) = f(x)$$

Sea $f_0 : ker\beta \to C$ la restricción de f y afirmamos que f_0 es R-isomorfismo; en efecto, si $x \in ker\beta$ y $f_0(x) = 0$, entonces $f(x) = 0$, lo que implica que $x \in kerf = Imh$ y por lo tanto, $x \in ker\beta \cap Imh = 0$. Por otro lado, si $z \in C$, entonces $z = f(b)$ para algún $b \in B$ y como antes, $b = x + y$ xon $x \in ker\beta, y \in Imh$, de donde $z = f(b) = f(x) = f_0(x)$.

Entonces definimos $g : C \to B$ como $g = i_{ker\beta} f_0^{-1}$ y tenemos que para todo $z \in C$, $z = f(b) = f(x)$ (como arriba) y de aquí que:

$$(fg)(z) = f(i_{ker\beta} f_0^{-1}(z)) = f(i_{ker\beta}(x)) = f(x) = z$$

lo que demuestra que $fg = 1_c$ y f es retracción.

En cada implicación se probó la existencia de R-isomorfismos: $h_0 : A \to Imh$ (la correstricción de h) y $f_0 : ker\beta \to C$ (la restricción de f), lo que nos permite definir $\alpha : B \to A \oplus C$ como sigue: cada $b \in B$ se escribe en forma única como $b = x + y$ con $x \in ker\beta, y \in Imh$, entonces:

$$\alpha(b) = \alpha(x+y) = \big(h_0^{-1}(y), f_0(x)\big)$$

Se tiene que α es R-isomorfismo ya que si $\alpha(b) = 0$, entonces $f_0(x) = 0$ y $h_0^{-1}(y) = 0$ lo que implica que $x = y = 0$ y de aquí que $b = 0$; además, si $(a, c) \in A \oplus C$, entonces $y = h_0(a) \in Imh$, existe $x \in ker\beta$ tal que $c = f_0^{-1}(x)$ y si $b = x + y$, entonces $b \in B$ y $\alpha(b) = \big(h_0^{-1}(y), f_0(x)\big) = (a, c)$.

Finalmente, el primer cuadrado del diagrama del enunciado de la proposición es conmutativo, ya que:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & h(a) \arrow[d] \\ a \arrow[r] & (a,0) \end{tikzcd}$$

en tanto que el segundo cuadrado conmuta, ya que:

$$\begin{tikzcd} b = x + y \arrow[r] \arrow[d] & f(b) = f(x) = f_0(x) \arrow[d] \\ \big(h_0^{-1}(y), f_0(x)\big) \arrow[r] & f_0(x) \end{tikzcd}$$

con lo cual terminamos la demostración.

2.9. Funtores Exactos Izquierdos y Derechos

Para esta sección consideramos solamente funtores aditivos entre categorías de R-módulos, ya que como mencionamos en una sección anterior, por ser F aditivo se tiene que F manda morfismos cero en morfismos cero, pero en este caso también manda objetos cero en objetos cero, ya que si consideramos el morfismo $0 : \{0\} \to \{0\}$, entonces es claro que $0 = 1_{\{0\}}$, de donde $1_{F(\{0\})} = F(1_{\{0\}}) = F(0) = 0$, lo que implica que si $x \in F(\{0\})$, entonces $x = 1_{F(\{0\})}(x) = 0(x) = 0$, es decir $F(\{0\}) = \{0\}$ tal como afirmamos. $\square$

Definición 2.21. Sea $F : Mod-R \to Mod-S$ un funtor covariante aditivo, decimos que F es un **funtor exacto izquierdo** si para cualquier sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

la sucesión:

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C)$$

es exacta.
Asimismo decimos que F es un **funtor exacto derecho** si para cualquier sucesión exacta:

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

la sucesión:

$$F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C) \longrightarrow 0$$

es exacta. Finalmente cuando F es un funtor exacto izquierdo y derecho, entonces se dice simplemente que F es un **funtor exacto**.

Es claro que un funtor F es exacto si y sólo si manda sucesiones exactas cortas en sucesiones exactas cortas.

Para el caso cuando el funtor F es contravariante se tiene la siguiente:

Definición 2.22. Sea $F : Mod - R \to Mod - S$ un funtor contravariante aditivo, decimos que F es un **funtor exacto izquierdo** si para cualquier sucesión exacta:

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

la sucesión:

$$0 \longrightarrow F(C) \xrightarrow{F(\beta)} F(B) \xrightarrow{F(\alpha)} F(A)$$

es exacta.
Asimismo decimos que F es un **funtor exacto derecho** si para cualquier sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

la sucesión:

$$F(C) \xrightarrow{F(\beta)} F(B) \xrightarrow{F(\alpha)} F(A) \longrightarrow 0$$

es exacta. Finalmente cuando F es un funtor exacto izquierdo y derecho, entonces se dice simplemente que F es un **funtor exacto**.

Veremos en la siguiente sección dos ejemplos importantes de funtores exactos izquierdos: los funtores Hom, y en la unidad IV, dos ejemplos importantes de funtores exactos derechos: los funtores producto tensorial.

2.10. Exactitud Izquierda del Funtor Hom

Recordemos que si $M \in Mod - R$, entonces el funtor:

$$Hom_R(M, \_\ ) : Mod - R \to Ab$$

es un funtor covariante aditivo. Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema 2.16. *El funtor $Hom_R(M, \_\ )$ es un funtor covariante exacto izquierdo, $\forall M \in Mod - R$.*

Demostración. Supongamos que tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} N''$$

Queremos probar entonces que la siguiente sucesión también es exacta:

$$0 \longrightarrow Hom_R(M, N') \xrightarrow{\alpha_*} Hom_R(M, N) \xrightarrow{\beta_*} Hom_R(M, N'')$$

En efecto, tenemos que:

(i) Si $\alpha_*(f) = 0$, entonces $\alpha f = 0$, lo que significa que para todo $m \in M$ $\alpha(f(m)) = 0$, y como α es monomorfismo, entonces de aquí se sigue que $f(m) = 0, \forall m \in M$ y por lo tanto, $f = 0$, con lo que queda probado que α_* es monomorfismo.

(ii) Sea $g \in Im\alpha_*$ es decir, existe f tal que $g = \alpha_*(f) = \alpha f$. De aquí se obtiene que:

$$\beta_*(g) = \beta g = \beta\alpha f = 0$$

Lo que implica que $g \in ker\beta_*$, y por tanto, $Im\alpha_* \subset ker\beta_*$.

Ahora sea $g \in ker\beta_*$, es decir $0 = \beta_*(g) = \beta g$, de donde para todo $m \in M$ se tiene que $\beta(g(m)) = 0$, es decir, $g(m) \in ker\beta = Im\alpha$, y ya que α es monomorfismo, entonces existe un único $n' \in N'$ tal que $\alpha(n') = g(m)$. Por lo tanto, podemos definir una función $f : M \to N'$ tal que para cada $m \in M$ hacemos $f(m) = n'$, y es fácil verificar que f es un R-homomorfismo.

Ahora bien, como $\alpha(n') = g(m)$, entonces $\alpha(f(m)) = g(m)$ y esto $\forall m \in M$, lo que implica que $\alpha f = g$, es decir, $\alpha_*(f) = g$, con lo cual queda probado que $g \in Im\alpha_*$ y $ker\beta_* \subset Im\alpha_*$ y por tanto la igualdad. □

De la misma forma se prueba el siguiente:

Teorema 2.17. *El funtor $Hom_R(\_\,, N)$ es un funtor contravariante exacto izquierdo, $\forall M \in Mod - R$.*

Vemos en los siguientes ejemplos, que en general estos dos funtores no son exactos derechos.

Ejemplo 2.33. Sea $R = \mathbb{Z}$ y consideremos la siguiente sucesión exacta canónica:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Si $M = \mathbb{Z}_2$, entonces sabemos por los resultados de arriba, que la siguiente sucesión:

$$0 \longrightarrow Hom(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} Hom(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\pi_*} Hom(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

es exacta.

Pero por un lado tenemos que $Hom(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}) = 0$ ya que si $f \in Hom(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q})$, entonces $f(0) = 0$ y $2f(1) = f(2 \cdot 1) = f(0) = 0$, de donde $f = 0$.

Mientras, por otro lado tenemos que $Hom(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$, ya que existe $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $f(0) = 0 + \mathbb{Z}$ y $f(1) = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$.

Estos dos hechos claramente implican que π_* no puede ser epimorfismo, lo que significa que el funtor $Hom(\mathbb{Z}_2, \_\ )$ no es exacto derecho.

Ejemplo 2.34. Ahora sea $N = \mathbb{Z}$, y si consideramos la misma sucesión exacta del ejemplo anterior, sabemos por el teorema anterior que la sucesión:

$$0 \longrightarrow Hom(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} Hom(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$$

es exacta.

Pero por un lado se tiene que $Hom(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$ ya que si $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, entonces para $x \in \mathbb{Q}$ y $n > 0$ se tiene que:

$$f(x) = f(n \cdot \frac{x}{n}) = nf(\frac{x}{n})$$

Y como $f(\frac{x}{n}) \in \mathbb{Z}$, entonces n divide a $f(x)$ y esto $\forall n > 0$, lo que implica que $f(x) = 0$ y $f = 0$.

Mientras que por otro lado, es claro que $Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \neq 0$.

Estos dos hechos claramente implican que i^* no puede ser epimorfismo, lo que significa que el funtor $Hom(\_\ , \mathbb{Z})$ no es exacto derecho.

2.11. Ejercicios Resueltos

EJERCICIO 2.12. Probar que el morfismo inclusión $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ es epimorfismo en la categoría de anillos con 1, pero obviamente i no es suprayectiva. Concluya entonces que i es un bimorfismo pero no un isomorfismo.

EJERCICIO 2.13. Sea $f : A \to B$ un homomorfismo de grupos con núcleo K y supóngase que f no es inyectiva. Si $g : K \to A$ es la inclusión, hallar $h : K \to A$ tal que $fg = fh$, pero $g \neq h$. Concluir entonces que, en la categoría de grupos, f es monomorfismo si y sólo si f es inyectiva. ¿Por qué falla el argumento en la categoría de anillos con 1?

EJERCICIO 2.14. Demostrar que en una categoría con objeto cero, cada monomorfismo tiene un núcleo y cada epimorfismo tiene un conúcleo.

EJERCICIO 2.15. Sea ζ una categoría con objeto cero (que denotamos por 0) y sea $A \in obj\zeta$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) A es objeto cero.

(ii) 1_A es morfismo cero.

(iii) Existe un monomorfismo $A \to 0$.

(iii) Existe un epimorfismo $0 \to A$.

EJERCICIO 2.16. Considere el siguiente diagrama conmutativo de la categoría $R-Mod$, el cual tiene renglones y columnas exactos:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & A_2' \arrow[d] \arrow[dr, "\alpha"] & & \\
0 \arrow[r] & A_1' \arrow[r] \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "\beta"'] & A \arrow[r] \arrow[d] & A_1'' \arrow[r] & 0 \\
 & & A_2'' \arrow[d] \arrow[ur, "g"'] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Demostrar que α y β son morfismos cero y que f y g son isomorfismos.

EJERCICIO 2.17. Probar que una sucesión en $R-Mod$:

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

es exacta si y sólo si $gf = 0$ y el único R-homomorfismo que existe $coker f \to N$ es monomorfismo.

Gustavo Tapia Sánchez *(gtapia@uacj.mx)*
Luis Loeza Chin *(luis.loeza@uacj.mx)*
Francisco Ávila Álvarez *(favila@uacj.mx)*
Instituto de Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.
Ave. del Charro 450 Norte, Partido Romero, Ciudad Juárez, Chihuahua, México, 32310.

Capítulo

3

Sumas y Productos Directos de Módulos

En esta unidad vemos los conceptos de suma y producto directo de R-módulos en su versión más general, es decir, para familias arbitrarias de R-módulos. Además probamos las importantísimas propiedades universales de la suma y producto directos, que nos permiten dar varias pruebas elegantes de diversas propiedades de los R-módulos. También demostramos las propiedades de preservación de sumas y productos directos del funtor Hom, y finalmente vemos los conceptos de límites directos e inversos, que de alguna manera generalizan los conceptos de suma y producto directo, y entre los ejemplos de límites directos e inversos, vemos los conceptos de pullback y pushout, que nos serán de utilidad en el estudio de los R-módulos inyectivos en la unidad V.

3.1. Definición de Suma y Producto Directo

El concepto de producto directo utiliza el concepto de producto cartesiano, pero para familias arbitrarias de conjuntos. Por lo tanto, vemos primero como es que se define este concepto.

Definición 3.1. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria de conjuntos, definimos el **producto cartesiano** de $\{A_i\}_{i\in I}$ como sigue:

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i | f(i) \in A_i, \forall i \in I\}$$

Siendo informales, a los elementos del producto cartesiano los denotamos como vectores de coordenadas (a_i) en donde $a_i \in A_i, \forall i \in I$.

Si cada A_i es un R-módulo derecho, vemos que al producto cartesiano $\prod_{i\in I} A_i$ se le puede dar estructura de R-módulo derecho, y esto es lo que da lugar al siguiente concepto.

Definición 3.2. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria de R-módulos derechos, definimos el **producto directo** de $\{A_i\}_{i\in I}$ como el producto cartesiano $\prod_{i\in I} A_i$ y en donde se definen las siguientes operaciones:

$$(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$$

$$(a_i)r = (a_i r)$$

Es decir, definimos las operaciones coordenada a coordenada, y no es difícil ver que entonces $\prod_{i\in I} A_i$ es un R-módulo derecho, en donde el elemento neutro aditivo es el vector nulo (0) y el inverso aditivo de (a_i) es $(-a_i)$.

Existe un R-submódulo distinguido del producto directo, el cual definimos a continuación.

Definición 3.3. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria de R-módulos derechos, definimos la **suma directa** de $\{A_i\}_{i\in I}$, como el R-submódulo de $\prod_{i\in I} A_i$ dado por:

$$\bigoplus_{i\in I} A_i := \{(a_i) \in \prod_{i\in I} A_i | a_i = 0 \text{ para casi toda } i \in I\}$$

en donde la última frase significa que $a_i \neq 0$ sólo para un número finito de a_i's.

Es fácil verificar que efectivamente la suma directa es un R-submódulo del producto directo.

Al igual que en el caso finito, se definen proyecciones e inyecciones canónicas como sigue:

(i) Las proyecciones son $p_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j$ tal que $p_j((a_i)) = a_j$. Es fácil ver que estas proyecciones son R-epimorfismos para cada $j \in I$.

(ii) Las inclusiones son $i_j : A_j \to \prod_{i\in I} A_i$ tal que $x \mapsto (a_i)$ en donde se define $a_i = 0, \forall i \neq j$ y $a_j = x$. Es fácil ver que estas inclusiones son R-monomorfismos para cada $j \in I$.

Es importante observar que tanto las proyecciones como las inclusiones, también se pueden definir para la suma directa, exactamente en la misma forma. Es fácil verificar cada una de las siguientes propiedades:

Proposición 3.1. *Son válidas:*

(i) $p_j i_j = 1_{A_j}$.

(ii) $p_k i_j = 0$ *siempre que* $k \neq j$.

Además en el caso de la suma directa, se tiene que:

(iii) $\sum i_j p_j = 1_{\oplus A_i}$, *en donde hay que notar que* $(i_j p_j)((a_i)) = 0$ *para casi toda* $j \in I$*, y por lo tanto la suma anterior, es finita para toda* $(a_i) \in \oplus A_i$.

En el caso especial en que $A_i = A, \forall i \in I$, se usan la notaciones:

$$\bigoplus_{i\in I} A := A^{(I)} \quad \text{y} \quad \prod_{i\in I} A := A^I$$

Además nótese que cuando el conjunto I es finito, entonces la suma directa y el producto directo coinciden, ya que entonces, resulta irrelevante la condición que define a la suma directa de que $a_i = 0$ para casi toda $i \in I$. En este caso, se puede usar cualquiera de las siguientes notaciones:

$$A_1 \oplus \cdots \oplus A_n = A_1 \times \cdots \times A_n$$

3.2. Propiedad Universal de la Suma Directa

En esta sección vemos una caracterización de la suma directa de R-módulos, la cual nos dice esencialmente que para definir un R-homomorfismo que sale de una suma directa, es suficiente con definir R-homomorfismos que salen de cada sumando directo.

Teorema 3.2. *(***Propiedad Universal de la Suma Directa***)*
Sean A_R *y* $\{A_i\}_{i\in I}$ *R-módulos derechos, entonces* $A \approx \bigoplus_{i\in I} A_i$ *si y sólo si existen R-homomorfismos* $\lambda_j : A_j \to A, (j \in I)$ *con la propiedad de que* $\forall M \in Mod - R$ *y cualesquier familia de R-homomorfismos* $f_j : A_j \to M, (j \in I)$ *existe un único R-homomorfismo* $\psi : A \to M$ *tal que* $\psi\lambda_j = f_j$ *para todo* $j \in I$*. Esto significa entonces que para cada* $j \in I$ *el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[rr, "\lambda_j"] \arrow[dr, "f_j"'] & & A \arrow[dl, dashed, "\exists!\psi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Demostración. Primero probamos que $\bigoplus_{i\in I} A_i$ con las inclusiones canónicas $i_j : A_j \to \bigoplus_{i\in I} A_i$ tiene la propiedad. Si $(a_i) \in \bigoplus_{i\in I} A_i$, queremos que se cumpla que:

$$\psi(i_j((a_i))) = f_j((a_i)), \forall j \in I$$

Si usamos la propiedad (iii) de la proposición 3.1, tenemos que:

$$\psi((a_i)) = \psi(\sum i_j p_j((a_i))) = \sum \psi(i_j p_j((a_i))) = \sum f_j(p_j((a_i)))$$

Esto prueba tanto la existencia de ψ como su unicidad.

Ahora sea A_R el cual junto con los R-homomorfismos $\lambda_j : A_j \to A, (j \in I)$ cumple con la propiedad universal de la suma directa. Esto implica entonces que existe un único R-homomorfismo ϕ que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A_j \arrow[rr, "\lambda_j"] \arrow[dr, "i_j"'] & & A \arrow[dl, dashed, "\exists!\phi"] \\
& \bigoplus_{i\in I} A_i &
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, si usamos la propiedad universal ya probada para $\bigoplus_{i\in I} A_i$, tenemos que existe un único R-homomorfismo ψ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A_j \arrow[rr, "i_j"] \arrow[dr, "\lambda_j"'] & & \bigoplus_{i\in I} A_i \arrow[dl, dashed, "\exists!\psi"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Podemos entonces juntar estos dos diagramas en uno solo, como sigue:

$$\begin{tikzcd}
A_j \arrow[r, "i_j"] \arrow[dr, "\lambda_j"'] \arrow[ddr, bend right, "i_j"'] & \bigoplus A_i \arrow[d, "\phi"] \arrow[dd, bend left=60, "1_{\oplus A_i}"] \\
& A \arrow[d, "\psi"] \\
& \bigoplus A_i
\end{tikzcd}$$

Veamos: uniendo los dos triángulos internos, se sigue que:

$$(\psi\phi)i_j = \psi(\phi i_j) = \psi\lambda_j = i_j$$

Pero la propiedad universal de $\bigoplus_{i\in I} A_i$, nos garantiza que existe un único R-homomorfismo que hace que el triángulo externo sea conmutativo, y claramente $1_{\bigoplus A_i}$ cumple con ello. Por lo tanto, necesariamente se debe tener que:

$$\psi\phi = 1_{\bigoplus A_i}$$

Análogamente se prueba que $\phi\psi = 1_A$, por lo que ψ es un R-isomorfismo y $A \approx \bigoplus_{i\in I} A_i$, tal como queríamos demostrar. □

Es importante notar que hay una diferencia enorme entre la definición que dimos de suma directa, y la propiedad universal que acabamos de probar, aún a pesar de que ambos son lógicamente equivalentes. En la primera, se establece cual es la propiedad que deben cumplir ciertos objetos para pertenecer o no a la suma directa: $(a_i) \in \bigoplus_{i\in I} A_i$ si y sólo si $a_i = 0$ para casi todo $i \in I$, mientras que en la segunda no se hace mención a elementos, sino a la existencia de ciertos homomorfismos con la propiedad universal .

Esto permite poder definir el concepto de suma directa de familias de objetos en cualquier categoría, solo que en este caso, no se habla de suma directa, sino de *coproducto directo*, el cual no es otra cosa sino un objeto de la categoría, con homomorfismos de la categoría que cumplan exactamente con la misma propiedad universal establecida en el teorema 3.1. No escribimos la definición porque es una repetición innecesaria de dicho teorema.

3.3. Propiedad Universal del Producto Directo

El producto directo también tiene una propiedad universal que lo caracteriza, la cual consiste en invertir el sentido de las flechas en la correspondiente a la suma directa, y cambiar la suma directa por el producto directo.

Obviamente, al cambiar el sentido de las flechas las inclusiones se convierten en proyecciones, y lo que se obtiene es una propiedad que básicamente dice que para definir un R-homomorfismo que entre al producto directo, es suficiente con definir R-homomorfismos que entren en cada factor directo.

Recordemos que el proceso de invertir el orden de las flechas, y sustituir un objeto por su contraparte, es llamado de *dualización*, y los objetos que son contraparte uno del otro se dice que son *objetos duales*. En nuestro caso, lo que obtenemos es que la suma directa y el producto directo, son conceptos duales.

Teorema 3.3. *(***Propiedad Universal del Producto Directo***)*
Sean A_R y $\{A_i\}_{i\in I}$ R-módulos derechos, entonces $A \approx \prod_{i\in I} A_i$ si y sólo si existen R-homomorfismos $\alpha_j : A \to A_j, (j \in I)$ con la propiedad de que $\forall M \in Mod - R$ y cualesquier familia de R-homomorfismos $f_j : M \to A_j, (j \in I)$ existe un único R-homomorfismo $\psi : M \to A$ tal que $\alpha_j\psi = f_j$ para todo $j \in I$. Esto significa entonces que para cada $j \in I$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A_j & & A \arrow[ll, "\alpha_j"'] \\ & M \arrow[ul, "f_j"] \arrow[ur, dashed, "\exists!\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Primero probamos que $\prod_{i\in I} A_i$ tiene la propiedad universal, donde las proyecciones canónicas toman el papel de las α_j's. En efecto, si $f_j : M \to A_j$ es dado para cada $j \in I$, entonces si $p_j\psi = f_j$ esto implica que para $m \in M$ se debe cumplir que la $j-$ésima coordenada de $\psi(m)$ debe ser igual a $f_j(m)$, por lo que no queda otra sino definir $\psi(m) = (f_i(m))$. Es fácil ver que ψ cumple que $p_j\psi = f_j$ para cada $j \in I$, y por la forma en que obtuvimos a ψ resulta claro que debe ser único.

Ahora supongamos que A_R con R-homomorfismos $\alpha_j : A \to A_j$ tienen la mencionada propiedad, y probemos que A tiene que ser isomorfo al producto directo de los A_i's, para lo cual hacemos algo similar a la prueba en el caso de la suma directa, es decir, por un lado tenemos que como A tiene la propiedad universal, entonces debe existir un único R-homomorfismo ϕ que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo para cada $j \in I$:

$$\begin{tikzcd} A_j & & A \arrow[ll, "\alpha_j"'] \\ & \prod A_i \arrow[ul, "p_j"] \arrow[ur, dashed, "\exists!\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Y por otro lado, como ya probamos que $\prod A_i$ tiene la propiedad universal, entonces debe existir un único R-homomorfismo ψ que hace que el siguiente diagrama es conmutativo para cada $j \in I$:

$$\begin{tikzcd} A_j & & \prod A_i \arrow[ll, "p_j"'] \\ & A \arrow[ul, "\alpha_j"] \arrow[ur, dashed, "\exists!\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Podemos entonces juntar estos dos diagramas en uno solo, como sigue:

$$
\begin{tikzcd}
A_j & \prod A_i \arrow[l, "p_j"'] \\
 & A \arrow[u, "\psi"'] \arrow[ul, "\alpha_j"] \\
 & \prod A_i \arrow[u, "\phi"'] \arrow[uul, bend left, "p_j"] \arrow[uu, bend right, "1_{\Pi A_i}"']
\end{tikzcd}
$$

Veamos: uniendo los dos triángulos internos, se sigue que:

$$p_j(\psi\phi) = (p_j\psi)\phi = \alpha_j\phi = p_j$$

Pero la propiedad universal de $\prod_{i\in I} A_i$, nos garantiza que existe un único R-homomorfismo que hace que el triángulo externo sea conmutativo, y claramente $1_{\Pi A_i}$ cumple con ello. Por lo tanto, necesariamente se debe tener que:

$$\psi\phi = 1_{\Pi A_i}$$

Análogamente se prueba que $\phi\psi = 1_A$, por lo que ψ es un R-isomorfismo y $A \approx \prod_{i\in I} A_i$, tal como queríamos demostrar. □

Nótese que la prueba de la propiedad universal del producto directo, esencialmente es la prueba dual de la correspondiente para la suma directa. Cuando este es el caso, se acostumbra simplemente decir que la prueba se sigue por dualidad. Sin embargo, no siempre es cierto que la prueba de un teorema dualizado, sea la dualización de la demostración, como se verá al estudiar ciertas propiedades de los R-módulos inyectivos y proyectivos.

3.4. Preservación de Sumas y Productos del Funtor Hom

Ahora vemos que el funtor Hom preserva productos directos en una de sus variables y convierte sumas directas en productos directos en la otra variable. Más precisamente tenemos:

Teorema 3.4. *Sean M_R y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos derechos y sea:*

$$\theta : Hom_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, M) \to \prod_{i\in I} Hom_R(M_i, M)$$

tal que si $f : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$, entonces $\theta(f) = (fi_i)_{i\in I}$. Entonces θ es un isomorfismo de grupos abelianos.

Demostración. θ es un homomorfismo ya que:

$$\theta(f+g) = ((f+g)i_i) = (fi_i + gi_i) = (fi_i) + (gi_i) = \theta(f) + \theta(g)$$

Ahora si suponemos que $\theta(f) = (0)$, entonces $fi_i = 0, \forall i \in I$, y por la propiedad universal de la suma directa se sigue que $f = 0$, lo que demuestra que θ es inyectiva.

Finalmente, si $(f_i) \in \prod Hom_R(M_i, M)$, entonces $f_i : M_i \to M$ y una aplicación más de la propiedad universal de la suma directa, implica que existe un único $f : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$ tal que $fi_i = f_i, \forall i \in I$, y de aquí que $\theta(f) = (fi_i) = (f_i)$ con lo cual queda demostrado que θ es suprayectiva, y por lo tanto, un isomorfismo. □

Análogamente tenemos que:

Teorema 3.5. *Sean M_R y $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos derechos y sea:*

$$\phi : Hom_R(M, \prod_{i\in I} M_i) \to \prod_{i\in I} Hom_R(M.M_i)$$

tal que si $f : M \to \prod_{i\in I} M_i$, entonces $\phi(f) = (p_i f)$. Entonces ϕ es un isomorfismo de grupos abelianos.

Demostración. ϕ es un homomorfismo ya que:

$$\phi(f+g) = (p_i(f+g)) = (p_i f + p_i g) = (p_i f) + (p_i g) = \phi(f) + \phi(g)$$

Ahora si suponemos que $\phi(f) = (0)$, entonces $p_i f = 0, \forall i \in I$ y por la propiedad universal del producto directo se sigue que $f = 0$, lo que demuestra que ϕ es inyectiva.

Finalmente, si $(f_i) \in \prod_{i\in I} Hom_R(M, M_i)$, entonces $f_i : M \to M_i$ y una aplicación más de la propiedad universal del producto directo, implica que existe un único $f : M \to \prod_{i\in I} M_i$ tal que $p_i f = f_i, \forall i \in I$, y de aquí que $\theta(f) = (p_i f) = (f_i)$ con lo cual queda demostrado que θ es suprayectiva, y por lo tanto, un isomorfismo. □

3.5. Límites Directos y Límites Inversos

En esta sección introducimos el concepto de límite directo y límite inverso, el cual es uno el dual del otro. Vemos algunos ejemplos de ellos, uno de los cuales muestra que la suma directa y el producto directo, son casos particulares de este tipo de límites, y probamos que estos límites siempre existen.

Definición 3.4. Sea I un conjunto pre-ordenado, considerado como categoría, un **sistema directo** para I es un funtor covariante:

$$F : I \to Mod - R$$

es decir:

(i) Para cada $i \in I$, $F(i) \in Mod - R$ y se denota por F_i.
(ii) Si $i \leq j$, entonces $\varphi_j^i := F(x_j^i) : F_i \to F_j$.
(iii) Si $i \leq j \leq k$, entonces $\varphi_k^j \varphi_j^i = \varphi_k^i$.
(iv) Para cada $i \in I$ se cumple que $\varphi_i^i = 1_{F_i}$.

Ejemplo 3.1. Sea I un conjunto con el orden trivial, es decir, $i \leq j \Leftrightarrow i = j$. Entonces un sistema directo para este conjunto I es una familia de R-módulos $\{F_i\}$, junto con las identidades $\{1_{F_i} | i \in I\}$.

En realidad, las identidades salen sobrando, porque al fin y al cabo, todo R-módulo esta en correspondencia biyectiva con su R-homomorfismo identidad. Por lo tanto, podemos decir simplemente que en este caso, un sistema directo no es más que una familia indexada (a través de I) de R-módulos.

Ejemplo 3.2. Sea $I = \{1, 2, 3\}$ con el pre-orden $1 < 2$ y $1 < 3$. Entonces un sistema directo para este conjunto I, está formado por tres R-módulos F_1, F_2 y F_3, junto con R-homomorfismos:

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_2 \\ F_3 & \end{tikzcd}$$

De aquí en adelante, denotaremos a un sistema directo en $Mod - R$ simplemente como $\{F_i, \varphi_j^i\}$.

Definición 3.5. Sea $\{F_i, \varphi^i_j\}$ un sistema directo en $Mod - R$. El **límite directo** para este sistema directo, es un R-módulo, denotado por:

$$\varinjlim F_i$$

junto con R-homomorfismos:

$$\alpha_i : F_i \to \varinjlim F_i \; (i \in I)$$

tal que resuelven el siguiente problema de mapeo universal $(i \leq j)$:

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim F_i \arrow[rr, dashed, "\exists ! \varphi"] & & X \\
& F_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "\lambda_i"] \arrow[d, "\phi^i_j"] & \\
& F_j \arrow[uul, "\alpha_j"] \arrow[uur, "\lambda_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Es importante hacer notar que si el límite directo existe, entonces debe ser único, y la razón es simple: resuelve un problema de mapeo universal, y entonces la prueba de la unicidad es exactamente la misma de cuando probamos la unicidad en la propiedad universal de la suma directa o el producto directo.

Veamos cual es el límite directo del sistema directo del ejemplo 3.5.1.

Ejemplo 3.3. Sea I con el orden trivial, y sea $\{F_i\}$ el sistema directo asociado. Entonces el límite directo de este sistema, por definición es un R-módulo, $\varinjlim F_i$, junto con R-homomorfismos $\alpha_i : F_i \to M$ tales que resuelven el siguiente problema de mapeo universal:

$$
\begin{tikzcd}
\varinjlim F_i \arrow[rr, dashed, "\exists!\varphi"] & & X \\
& F_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "\lambda_i"] \arrow[d, "1_{F_i}"] & \\
& F_i \arrow[uul, "\alpha_i"] \arrow[uur, "\lambda_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

Pero claramente los dos triángulos inferiores son conmutativos trivialmente, por lo que en este caso, la propiedad universal se reduce a:

$$
\begin{tikzcd}
\varinjlim F_i \arrow[rr, dashed, "\exists!\varphi"] & & X \\
& F_i \arrow[ul, "\alpha_i"] \arrow[ur, "\lambda_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

la cual vemos que es precisamente la propiedad universal de la suma directa!!.
En conclusión, en este caso el límite directo es la suma directa de los F_i's y donde los R-homomorfismos α_i son las inclusiones canónicas.

El límite directo del sistema directo del ejemplo 3.5.2, lo dejamos pendiente para la siguiente sección ya que da lugar a un concepto especial, el cual es uno de los temas de dicha sección.

Ahora veamos que el límite directo de cualquier sistema directo, siempre existe.

Teorema 3.6. *Sea $\{F_i, \varphi_j^i\}$ un sistema directo de R-módulos, entonces existe $\varinjlim F_i$.*

Demostración. Sean $\lambda_i : F_i \to \bigoplus F_i$ las inclusiones, y consideremos el submódulo generado dentro de $\bigoplus F_i$:

$$S = \langle\{\lambda_j\varphi_j^i(a) - \lambda_i(a) | a \in F_i,\ i \leq j\}\rangle$$

Entonces definimos los R-homomorfismos α_i como las siguientes composiciones:

$$F_i \xrightarrow{\lambda_i} \bigoplus F_i \xrightarrow{\pi} \bigoplus F_i/S$$

Y afirmamos que $\{\bigoplus F_i/S, \alpha_i\}$ resuelve el problema universal del límite directo.

En efecto, tenemos que:

(i) Sean $i \leq j$ y $a \in F_i$, entonces $\lambda_j \varphi_j^i(a) - \lambda_i(a) \in S$, lo que implica que $\lambda_j \varphi_j^i(a) + S = \lambda_i(a) + S$, y de aquí se sigue que $\alpha_j \varphi_j^i(a) = \alpha_i(a)$, con lo cual queda probado que conmutan los triángulos inferiores izquierdos del diagrama universal.

(ii) Ahora supongamos que existe $\{X, f_i\}$ con $f_i : F_i \to X$ tales que $f_j \varphi_j^i = f_i$ siempre que $i \leq j$.

Por la propiedad universal de la suma directa, sabemos que existe un único R-homomorfismo $h : \bigoplus F_i \to X$ tal que $h\lambda_i = f_i, \forall i$, y afirmamos que $S \subset kerh$. En efecto, ya que $f_j \varphi_j^i(a) - f_i(a) = 0, \forall a \in F_i$, esto implica que $h\lambda_j \varphi_j^i(a) - h\lambda_i(a) = 0, \forall a \in F_i$, y de aquí es claro que se cumple nuestra afirmación.

Pero entonces podemos aplicar el Teorema del Factor para ver que existe un único R-homomorfismo $\beta : \bigoplus F_i/S \to X$ tal que $\beta\pi = h$. De esto se sigue que $\beta\alpha_i = \beta\pi\lambda_i = h\lambda_i = f_i$, tal como se requiere en el problema de mapeo universal.

Finalmente mencionamos que la unicidad de β es consecuencia de las unicidades de la propiedad universal de la suma directa y del Teorema del Factor, que usamos en la prueba de (ii). □

Finalizamos esta sección con el concepto de límite inverso, el cual es el dual del límite directo. De hecho, en este caso las demostraciones son las duales de las que hemos dado, por lo que omitimos las pruebas.

Definición 3.6. Sea I un conjunto pre-ordenado, considerado como categoría, un **sistema inverso** para I es un funtor contravariante:

$$F : I \to Mod - R$$

es decir:

(i) Para cada $i \in I$, $F(i) \in Mod - R$ y se denota por F_i.

(ii) Si $i \leq j$, entonces $\psi_i^j := F(x_j^i) : F_j \to F_i$.

(iii) Si $i \leq j \leq k$, entonces $\psi_j^k \psi_i^j = \psi_i^k$.

(iv) Para cada $i \in I$ se cumple que $\psi_i^i = 1_{F_i}$.

Ejemplo 3.4. Sea I un conjunto con el orden trivial. Entonces un sistema inverso para este conjunto I es una familia de R-módulos $\{F_i\}$, junto con las identidades $\{1_{F_i} | i \in I\}$.

Nuevamente, las identidades salen sobrando, y por lo tanto un sistema inverso en este caso, no es más que una familia indexada (a través de I) de R-módulos.

Ejemplo 3.5. Sea $I = \{1, 2, 3\}$ con el pre-orden $1 < 2$ y $1 < 3$. Entonces un sistema inverso para este conjunto I, está formado por tres R-módulos F_1, F_2 y F_3, junto con

R-homomorfismos:

$$\begin{tikzcd}
 & F_2 \arrow[d] \\
F_3 \arrow[r] & F_1
\end{tikzcd}$$

Un sistema inverso en $Mod - R$ se denota como $\{F_i, \psi_i^j\}$.

Definición 3.7. Sea $\{F_i, \psi_i^j\}$ un sistema inverso en $Mod - R$. El **límite inverso** para este sistema inverso, es un R-módulo derecho denotado por:

$$\varprojlim F_i$$

junto con R-homomorfismos:

$$\alpha_i : \varprojlim F_i \to F_i \ (i \in I)$$

tal que resuelven el siguiente problema de mapeo universal $(i \leq j)$:

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim F_i \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, "\alpha_j"'] & & X \arrow[ll, dashed, "\exists ! \beta"'] \arrow[dl, "\lambda_i"'] \arrow[ddl, "\lambda_j"] \\
 & F_i & \\
 & F_j \arrow[u, "\psi_i^j"] &
\end{tikzcd}$$

Nuevamente si el límite inverso existe, entonces debe ser único, por ser la solución a un problema de mapeo universal.

Veamos cual es el límite inverso del sistema inverso del ejemplo 3.5.4.

Ejemplo 3.6. Sea I con el orden trivial, y sea $\{F_i\}$ el sistema inverso asociado. Entonces el límite inverso de este sistema, por definición es un R-módulo, $\varprojlim F_i$, junto con R-homomorfismos $\alpha_i : \varprojlim F_i \to F_i$ tales que resuelven el siguiente problema de mapeo universal:

$$
\begin{tikzcd}
\varprojlim F_i \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, "\alpha_i"'] & & X \arrow[ll, dashed, "\exists!\beta"'] \arrow[dl, "\lambda_i"'] \arrow[ddl, "\lambda_i"] \\
& F_i & \\
& F_i \arrow[u, "1_{F_i}"] &
\end{tikzcd}
$$

Pero claramente los dos triángulos inferiores son conmutativos trivialmente, por lo que en este caso, la propiedad universal se reduce a:

$$
\begin{tikzcd}
\varprojlim F_i \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & X \arrow[ll, dashed, "\exists!\beta"'] \arrow[dl, "\lambda_i"] \\
& F_i &
\end{tikzcd}
$$

la cual es precisamente la propiedad universal del producto directo!!.
En conclusión, en este caso el límite inverso es el producto directo de los F_i's y donde los R-homomorfismos α_i son las proyecciones canónicas.

El límite inverso del sistema inverso del ejemplo 3.5.5, también lo dejamos pendiente para la siguiente sección por la misma razón del correspondiente para límite directo.

Al igual que con límites directos, se tiene el siguiente:

Teorema 3.7. *Sea $\{F_i, \psi_i^j\}$ un sistema inverso de R-módulos, entonces existe $\varprojlim F_i$.*

3.6. Pushouts y Pullbacks

Como mencionamos en la sección anterior, los ejemplos 3.5.2 y 3.5.5 de sistema directo e inverso, respectivamente dan lugar a dos conceptos importantes, cuando se determina cuales son el límite directo e inverso, respectivamente, y son precisamente los temas de esta sección.

Procedamos entonces con el primero.

Ejemplo 3.7. Sea $I = \{1, 2, 3\}$ con el pre-orden $1 < 2$ y $1 < 3$, como vimos en el ejemplo 3.5.2, un sistema directo consta de:

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & F_2 \\ F_3 & \end{tikzcd}$$

Entonces un límite directo para este sistema consta de un R-módulo, M, y R-homomorfismos $f' : F_2 \to M$, $g' : F_3 \to M$, y $h : F_1 \to M$ tales que se cumpla que $f'g = h$, $g'f = h$ y $f'g = g'f$. Pero en realidad, las primeras dos igualdades implican la tercera, y también, si se cumple la tercera, entonces se cumplen las dos primeras, definiendo h como $f'g = g'f$.

Por lo tanto, el límite directo consta del siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & F_2 \arrow[d, "f'"] \\ F_3 \arrow[r, "g'"'] & M \end{tikzcd}$$

Y la propiedad universal se traduce en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & F_2 \arrow[d, "f'"'] \arrow[ddr, bend left, "f''"] & \\ F_3 \arrow[r, "g'"'] \arrow[drr, bend right, "g''"'] & M \arrow[dr, dashed, "\exists!\psi"'] & \\ & & X \end{tikzcd}$$

Este límite directo recibe un nombre especial, y resumimos sus propiedades en la siguiente:

Definición 3.8. Dados $g : F_1 \to F_2$ y $f : F_1 \to F_3$, un **pushout** de ellos consta de un módulo M_R y R-homomorfismos $f' : F_2 \to M$ y $g' : F_3 \to M$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & F_2 \arrow[d, "f'"] \\
F_3 \arrow[r, "g'"'] & M
\end{tikzcd}$$

Y además, siempre que existan otros R-homomorfismos $f'' : F_2 \to X$ y $g'' : F_3 \to X$ tales que $f''g = g''f$, entonces existe un único R-homomorfismo $\psi : M \to X$ tal que $\psi f' = f''$ y $\psi g' = g''$. Todo lo anterior se abrevia diciendo que el pushout, es un módulo M_R que resuelve el siguiente problema de mapeo universal:

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & F_2 \arrow[d, "f'"'] \arrow[ddr, bend left, "f''"] & \\
F_3 \arrow[r, "g'"'] \arrow[drr, bend right, "g''"'] & M \arrow[dr, dashed, "\exists! \psi"'] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

Como probamos en la sección anterior, dado cualquier sistema directo, existe su límite directo, lo que implica en particular, que el pushout también existe, por ser el límite directo de un sistema directo particular.

Pero vemos a continuación, que es posible dar una descripción más simple del pushout.

Proposición 3.8. *Sean $g : A \to B$ y $f : A \to C$, y sea $D = (C \oplus B)/W$ donde $W = \{(f(a), -g(a)) | a \in A\}$. Si además definimos $f' : B \to D$ tal que $f'(b) = (0, b) + W$ y $g' : C \to D$ tal que $g'(c) = (c, 0) + W$, entonces $\{D, f', g'\}$ es el pushout de $\{f, g\}$.*

Demostración. Es fácil ver tanto que W es un R-submódulo de $C \oplus B$ como que f' y g' son R-homomorfismos.

Ahora sea $a \in A$ entonces $(f(a), -g(a)) \in W$ lo que implica que:

$$(f(a), 0) - (0, g(a)) \in W$$

de donde:

$$f'g(a) = (0, g(a)) + W = f(a) + W = g'f(a)$$

Y como esto es cierto $\forall a \in A$, entonces hemos probado que $f'g = g'f$.

Ahora supongamos que X es otro R-módulo con dos R-homomorfismos $f'' : B \to X$ y $g'' : C \to X$ tales que $f''g = g''f$. Entonces, por la propiedad universal de la suma directa, sabemos que existe un único R-homomorfismo $h : C \oplus B \to X$ tal que $hi_C = g''$ y $hi_B = f''$, y afirmamos que $W \subset ker h$.

En efecto, sea $(f(a), -g(a)) \in W$ entonces:

$$\begin{aligned} h(f(a), -g(a)) &= h((f(a), 0) - (0, g(a))) = h(f(a), 0) - h(0, g(a)) \\ &= hi_C(f(a)) - hi_B(g(a)) = g''f(a) - f''g(a) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Teorema del Factor se sigue que existe un único R-homomorfismo $\theta : (C \oplus B)/W \to X$ tal que $\theta\pi = h$, donde $\pi : c \oplus B \to (C \oplus B)/W$ es la proyección canónica.

Pero entonces tenemos que $g'' = hi_C = \theta\pi i_C = \theta g'$, y análogamente se ve que $f'' = \theta f'$.

Finalmente comentamos que la unicidad de θ se sigue de las unicidades de la propiedad universal de la suma directa y del Teorema del Factor que usamos para probar su existencia. $\square$

Una consecuencia de la proposición anterior, y que nos será de utilidad en la unidad V, es la siguiente:

Proposición 3.9. *Consideremos el siguiente diagrama de pushout:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"] \\ C \arrow[r, "g'"'] & (C \oplus B)/W \end{tikzcd}$$

Si g es monomorfismo (epimorfismo), entonces g' es monomorfismo (epimorfismo).

Demostración. Supongamos que g es monomorfismo, y sea $c \in C$ tal que $g'(c) = \overline{0}$, es decir, $(c, 0) + W = W$, lo que implica que $(c, 0) \in W$, es decir, existe $a \in A$ tal que $(c, 0) = (f(a), -g(a))$, y de aquí que $c = f(a)$ y $0 = g(a)$. Esta última igualdad implica que $a = 0$ de donde $c = f(a) = 0$, con lo cual queda probado que g' es monomorfismo.

Ahora supongamos que g es epimorfismo y sea $(c, b) + W \in (C \oplus B)/W$, entonces existe $a \in A$ tal que $g(a) = b$ y definimos $c' = f(a) + c$, entonces

$$(c', 0) - (c, b) = (c' - c, -b) = (f(a), -g(a)) \in W$$

y esto significa que $(c, b) + W = (c', 0) + W = g'(c')$ lo que demuestra que g' es epimorfismo. $\square$

Al igual que con los límites inversos, el dual del pushout solo será comentado superficialmente, ya que las pruebas son las duales de las que hemos visto en esta sección.

Definición 3.9. Dado el sistema inverso:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

El **pullback** es el límite inverso correspondiente, y consta de un módulo M_R con R-homomorfismos α y β que hacen que el siguiente cuadrado sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

Y además, dados cualesquier otros dos R-homomorfismos $\alpha' : X \to C$ y $\beta' : X \to B$ que hacen que el cuadrado sea conmutativo, entonces existe un único $\theta : X \to M$ tal que $\alpha\theta = \alpha'$ y $\beta\theta = \beta'$.
Todo lo anterior se abrevia diciendo que el pullback resuelve el siguiente problema de mapeo universal:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[drr, bend left, "\alpha'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta'"'] & & \\ & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "g"] \\ & B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

Proposición 3.10. *Sean $f : B \to A$ y $g : C \to A$, y definamos:*

$$D = \{(b, c) \in B \oplus C | f(b) = g(c)\}$$

Sean $\alpha : D \to C$ tal que $\alpha(b, c) = c$ y $\beta : D \to B$ tal que $\beta(b, c) = b$.
Entonces $\{D, \alpha, \beta\}$ es el pullback de $\{f, g\}$.

Proposición 3.11. *En la construcción del pullback de la proposición anterior, si g es monomorfismo (epimorfismo), entonces β es monomorfismo (epimorfismo).*

3.7. Ejercicios Resueltos

EJERCICIO 3.18. Sean M_R y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos derechos. Si $f, g : \bigoplus A_i \to M$ son R-homomorfismos e $i_j : A_j \to \bigoplus A_i$ son las inclusiones canónicas $(j \in I)$, demostrar que:

(a) Si $fi_j = 0$ para todo $j \in I$, entonces $f = 0$.
(b) Si $fi_j = gi_j$ para todo $j \in I$, entonces $f = g$.

EJERCICIO 3.19. Sean M_R y $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos derechos. Si $f, g : M \to \prod A_i$ son R-homomorfismos y $p_j : \prod A_j \to A_j$ son las proyecciones canónicas $(j \in I)$, demostrar que:

(a) Si $p_jf = 0$ para todo $j \in I$, entonces $f = 0$.
(b) Si $p_jf = p_jg$ para todo $j \in I$, entonces $f = g$.

EJERCICIO 3.20. Sean M_R y $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia indexada de R-módulos derechos. Probar que:

(a) Si $f_\alpha : M \to M_\alpha$ son R-homomomorfismos $(\alpha \in I)$, entonces existe un R-homomorfismo $f : M \to \prod M_\alpha$ tal que $\ker f = \bigcap \ker f_\alpha$.
(b) Si $M_\alpha \leq M$ para todo $\alpha \in I$ y $\bigcap M_\alpha = \{0\}$, entonces $M \hookrightarrow \prod M/M_\alpha$.

EJERCICIO 3.21. Sean M_R y $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia indexada de R-módulos derechos. Probar que:

(a) Si $f_\alpha : M_\alpha \to M$ son R-homomomorfismos $(\alpha \in I)$, entonces existe un R-homomorfismo $f : \bigoplus M_\alpha \to M$ tal que $Imf = \sum Imf_\alpha$.
(b) Si $M_\alpha \leq M, \forall\alpha \in I$, entonces existe un R-epimorfismo $\bigoplus M_\alpha \to \sum M_\alpha$.

EJERCICIO 3.22. Demostrar el teorema 3.6.

EJERCICIO 3.23. Demostrar la proposición 3.4.

EJERCICIO 3.24. Demostrar la proposición 3.5.

EJERCICIO 3.25. Sea $f : B \to A$ un R-homomorfismo de módulos izquierdos. Demostrar que $\ker f$ es el pullback del sistema inverso:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d, "0"] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

EJERCICIO 3.26. Sea $f : A \to B$ un R-homomorfismo de módulos izquierdos. Demostrar que $coker f$ es el pushout del sistema directo:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \\
0 &
\end{tikzcd}
$$

Gustavo Tapia Sánchez *(gtapia@uacj.mx)*
Luis Loeza Chin *(luis.loeza@uacj.mx)*
Francisco Ávila Álvarez *(favila@uacj.mx)*
Instituto de Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Ave. del Charro 450 Norte, Partido Romero, Ciudad Juárez, Chihuahua, México, 32310.

Capítulo

4

Producto Tensorial

En esta unidad hacemos un estudio del funtor producto tensorial, el cual está íntimamente relacionado con el funtor Hom. Primero definimos el producto tensorial, como cierto grupo abeliano asociado a un par de módulos, después probamos su existencia y vemos como en algunos casos especiales, al producto tensorial se le puede dar estructura de módulo. Entonces definimos el funtor producto tensorial, el cual al igual que el funtor Hom es un funtor en dos variables, y tiene propiedades casi duales a las del Hom. Al final de la unidad, probamos el importante teorema del isomorfismo adjunto, el cual establece que estos dos funtores, son funtores adjuntos, y en realidad esta es la razón por la cual estos dos funtores tienen las propiedades vistas.

4.1. Definición del Producto Tensorial

Para definir el producto tensorial, usamos el concepto de grupo abeliano libre, el cual es un caso especial de R-módulo libre que veremos al principio de la última unidad.

Definición 4.1. Sea G un grupo abeliano y sea $X \subset G$, decimos que G es un grupo abeliano **libre** con base X si para cada $g \in G$ existen enteros únicos m_x para cada $x \in X$, tales que

$$g = \sum_{x \in X} m_x x$$

en donde $m_x = 0$ para casi toda x.

Existe una gran similitud entre las propiedades de los grupos abelianos libres y las de los espacios vectoriales (en realidad, todo espacio vectorial es libre como $\mathbb{K}$-módulo). El lector recordará que cuando definimos una función en una base de un espacio vectorial, ésta puede extenderse de forma única al espacio completo. Esta es la misma propiedad para grupos abelianos libres, como vemos a continuación.

Proposición 4.1. *Sea G un grupo abeliano libre con base X, y sea G′ cualquier otro grupo abeliano y $f : X \to G'$ cualquier función. Entonces podemos extender f a un homomorfismo $\widetilde{f} : G \to G'$.*

Demostración. Si $\widetilde{f}$ es un homomorfismo que extiende a f, entonces para cada $g \in G$ se cumple que:

$$\widetilde{f}(g) = \widetilde{f}(\sum_{x \in X} m_x x) = \sum_{x \in X} m_x \widetilde{f}(x) = \sum_{x \in X} m_x f(x)$$

Esto prueba la unicidad, y nos dice como debe estar definida $\widetilde{f}$. Es fácil verificar que con esta definición, $\widetilde{f}$ es un homomorfismo que extiende a f. □

Proposición 4.2. *Dado cualquier conjunto X, existe un grupo abeliano libre con base X.*

Demostración. Sea G el conjunto de todas las $\mathbb{Z}$-combinaciones lineales formales de elementos de X, es decir:

$$G = \left\{ \sum_{x \in X} m_x x | m_x \in \mathbb{Z} \text{ y } m_x = 0 \text{ para casi toda } x \right\}$$

y donde establecemos que:

$$\sum_{x \in X} m_x x = \sum_{x \in X} n_x x \;\Leftrightarrow\; m_x = n_x, \forall x \in X$$

Además se define la operación suma como sigue:

$$\sum_{x \in X} m_x x + \sum_{x \in X} n_x x = \sum_{x \in X} (m_x + n_x) x$$

Entonces es fácil verificar que G es un grupo abeliano libre con base X, en donde se define que $1 \cdot x = x$. □

Definición 4.2. Sean A_R y ${}_R B$ y sea G un grupo abeliano aditivo. Decimos que una función $f : A \times B \to G$ es **R-biaditiva** si para cualesquier $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ y $r \in R$ se cumple que:
(i) $f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b)$.
(ii) $f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b')$.
(iii) $f(ar, b) = f(a, rb)$.

Definición 4.3. El **producto tensorial** de A_R y $_RB$ es un grupo abeliano denotado como $A \otimes_R B$, junto con una función R-biaditiva $h : A \times B \to A \otimes_R B$ tal que resuelven el siguiente problema de mapeo universal:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & A \otimes_R B \arrow[dl, dashed, "\theta"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Esto es, para cada grupo abeliano G y cada función R-biaditiva f, existe un único homomorfismo θ que hace que el diagrama anterior sea conmutativo.

4.2. Existencia del Producto Tensorial

Es claro que el producto tensorial de A_R y $_RB$, si existe debe ser único (salvo isomorfismo) ya que resuelve un problema universal. A continuación probamos la existencia de tal grupo abeliano.

Teorema 4.3. *Existe el producto tensorial de A_R y $_RB$.*

Demostración. Con base en la proposición 4.2, podemos considerar F el grupo abeliano libre con base $A \times B$, es decir, F consiste de todas las $\mathbb{Z}$-combinaciones lineales formales de las parejas $(a, b) \in A \times B$. A continuación definimos S como el subgrupo de F el cual está generado por todos los elementos de las siguientes tres formas:

$$(a + a', b) - (a, b) - (a', b), (a, b + b') - (a, b) - (a, b'), (ar, b) - (a, rb)$$

en donde hemos usado la notación $-(a, b) := (-1)(a, b)$.

Entonces definimos $A \otimes_R B = F/S$. Ahora denotemos la clase $(a, b) + S$ como $a \otimes b$, y se sigue de la definición de S, que la función $h : A \times B \to A \otimes_R B$ dada por $(a, b) \mapsto a \otimes b$, es R-biaditiva.

Probamos ahora que $\{A \otimes_R B, h\}$ resuelve el problema universal, así que consideremos cualquier grupo abeliano G y cualquier función R-biaditiva $f : A \times B \to G$. Por la proposición 4.1, podemos extender f a un único homomorfismo $\theta : F \to G$, es decir, tal que $\theta(a, b) = f(a, b)$.

Por otro lado, es fácil probar que como f es R-biaditiva, entonces $S \subset \ker\theta$ por lo que podemos usar el Teorema del Factor para hallar un único homomorfismo ψ : $A \otimes_R B \to G$ tal que $\psi(a \otimes b) = f(a,b)$, y esto significa que $\psi h = f$. La unicidad de ψ se sigue del hecho de que cada elemento de $A \otimes_R B$ es una suma finita de elementos de la forma $a \otimes b$. □

4.3. Propiedades del Producto Tensorial

Algunas propiedades algebraicas del producto tensorial se prueban muy fácilmente a partir de la construcción de $A \otimes_R B$ dada en el teorema anterior.

Proposición 4.4. *Si $a, a' \in A_R$ y $b, b' \in {}_RB$ y $r \in R$, entonces:*

(i) $(a + a') \otimes b = (a \otimes b) + (a' \otimes b)$.

(ii) $a \otimes (b + b') = (a \otimes b) + (a \otimes b')$.

(iii) $ar \otimes b = a \otimes rb$.

(iv) $a \otimes 0 = 0 \otimes b = 0$.

(v) $(-a) \otimes b = a \otimes (-b) = -(a \otimes b)$.

(vi) Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $n(a \otimes b) = (na) \otimes b = a \otimes (nb)$.

(vii) Cada elemento de $A \otimes_R B$ es de la forma $\sum a_i \otimes b_i$.

Demostración. (i) Por la definición de $A \otimes_R B = F/S$ dada en la demostración del teorema 4.1, tenemos que:

$$(a + a') \otimes b = (a + a', b) + S = ((a, b) + S) + ((a, b') + S) = (a \otimes b) + (a' \otimes b)$$

(ii) Es análoga a (i), ya que:

$$a \otimes (b + b') = (a, b + b') + S = ((a, b) + S) + ((a, b') + S) = (a \otimes b) + (a \otimes b')$$

(iii) Es análoga a (i) y (ii) ya que:

$$ar \otimes b = (ar, b) + S = (a, rb) + S = a \otimes rb$$

(iv) Usando (ii) tenemos que:

$$a \otimes 0 = a \otimes (0 + 0) = (a \otimes 0) + (a \otimes 0)$$

y de aquí se sigue que $a \otimes 0 = 0$. La otra igualdad es análoga.

(v) Usando (i) y (iv) tenemos que:

$$((-a) \otimes b) + (a \otimes b) = ((-a) + a) \otimes b = 0 \otimes b = 0$$

lo que implica que $(-a) \otimes b = -(a \otimes b)$. La otra igualdad es análoga.

(vi) Supongamos primero que $n \geq 0$, y usamos inducción sobre n. Si $n = 0$, es el inciso (iv), por lo que suponemos que la fórmula es válida para n, de donde:

$$(n+1)(a \otimes b) = n(a \otimes b) + (a \otimes b) = (na \otimes b) + (a \otimes b) = (na + a) \otimes b = (n+1)a \otimes b$$

lo que prueba la igualdad para $n + 1$.

Ahora suponemos que $m = -n$ con $n > 0$ y nuevamente usamos inducción sobre n. Si $n = 1$, es el inciso (v), por lo que suponemos que la fórmula es válida para $m = -n$, de donde si $m = -(n+1)$, entonces:

$$\begin{aligned} m(a \otimes b) &= [(-n) + (-1)](a \otimes b) = (-n)(a \otimes b) + (-1)(a \otimes b) \\ &= ((-n)a \otimes b) + ((-a) \otimes b) = ([(-n) + (-1)]a) \otimes b = (ma) \otimes b \end{aligned}$$

La otra igualdad de este inciso se prueba de forma análoga.

(vii) Es consecuencia de (vi) ya que cualquier elemento $x \in A \otimes_R B$ es una $\mathbb{Z}$-combinación lineal de elementos de la forma $a'_i \otimes b_i$, de donde:

$$x = \sum n_i(a'_i \otimes b_i) = \sum (n_i a'_i) \otimes b_i = \sum a_i \otimes b_i$$

$\square$

Es importante notar que la expresión de $x \in A \otimes_R B$ como $\sum a_i \otimes b_i$ no es única, ya que siguiendo con la prueba de (vii), también se tiene que:

$$x = \sum n_i(a'_i \otimes b_i) = \sum a'_i \otimes (n_i b_i) = \sum a'_i \otimes b'_i$$

que es otra expresión distinta para el mismo x.

4.4. El Funtor Tensorial

Para ver que existe un funtor tensorial necesitamos probar algunas propiedades adicionales.

Proposición 4.5. *Sean $f : A \to A'$ un R-homomorfismo de módulos derechos, y $g : B \to B'$ un R-homomorfismo de módulos izquierdos. Entonces existe un único homomorfismo $A \otimes_R B \to A' \otimes_R B'$ tal que $a \otimes b \mapsto f(a) \otimes g(b)$.*

Demostración. Sea $h : A \times B \to A' \otimes_R B'$ dada por $h(a, b) = f(a) \otimes g(b)$, entonces h es R-biaditiva. En efecto, tenemos que:

$$\begin{aligned} h(ar, b) &= f(ar) \otimes g(b) = (f(a)r) \otimes g(b) = f(a) \otimes (rg(b)) \\ &= f(a) \otimes g(rb) = h(a, rb) \end{aligned}$$

y las otras dos igualdades son análogas.

Por lo tanto, por la propiedad universal del producto tensorial existe un único homomorfismo $\theta : A \otimes_R B \to A' \otimes_R B'$ tal que:

$$\theta(a \otimes b) = h(a, b) = f(a) \otimes g(b)$$

$\square$

Al homomorfismo θ de la proposición anterior lo denotamos como $f \otimes g$.

Proposición 4.6. *Sean $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ R-homomorfismos de módulos derechos y $B \xrightarrow{g} B' \xrightarrow{g'} B''$ R-homomorfismos de módulos izquierdos, entonces:*

$$f' \otimes g' \circ f \otimes g = f'f \otimes g'g$$

Demostración. Ya que cada elemento del producto tensorial $A \otimes_R B$ es de la forma $\sum a_i \otimes b_i$, es suficiente ver que se da la igualdad en cada generador $a \otimes b$, En efecto, tenemos que:

$$\begin{aligned} (f' \otimes g' \circ f \otimes g)(a \otimes b) &= (f' \otimes g')(f(a) \otimes g(b)) = f'f(a) \otimes g'g(b) \\ &= (f'f) \otimes (g'g)(a \otimes b) \end{aligned}$$

$\square$

Corolario 4.7. *Para cada $A \in Mod - R$ existe un funtor covariante aditivo:*

$$F : R - Mod \to Ab$$

tal que $F(B) = A \otimes_R B$ y si $g : B \to B'$ es R-homomorfismo de módulos izquierdos, entonces $F(g) = 1_A \otimes g$.

Análogamente para cada $B \in R - Mod$ existe un funtor covariante aditivo:

$$G : Mod - R \to Ab$$

tal que $G(A) = A \otimes_R B$ y si $f : A \to A'$ es R-homomorfismo de módulos derechos, entonces $G(f) = f \otimes 1_B$.

Demostración. Por la proposición anterior tenemos que

$$F(gh) = 1_A \otimes (gh) = (1_A \otimes g) \circ (1_A \otimes h) = F(g)F(h)$$

Es claro que $F(1_B) = 1_A \otimes 1_B = 1_{A \otimes B}$, y también:

$$F(g + h) = 1_A \otimes (g + g') = (1_A \otimes g) + (1_A \otimes h) = F(g) + F(h)$$

La prueba correspondiente al funtor G es completamente análoga. $\square$

Es costumbre escribir $A \otimes_R \_$ para denotar al funtor F definido en el corolario anterior, y $\_ \otimes_R B$ para el funtor G. A diferencia del funtor Hom, ambos funtores tensoriales son covariantes.

4.5. Bimódulos

En esta sección vemos como bajo ciertas condiciones, el producto tensorial puede ser un R-módulo.

Definición 4.4. Sean R y S anillos, decimos que un grupo abeliano M es un **R-S-bimódulo**, lo cual denotamos como ${}_RM_S$, si M es un R-módulo izquierdo, M es un R-módulo derecho y ambos productos por escalares son compatibles entre sí, es decir, para todo $m \in M$, $r \in R$ y $s \in S$ se verifica que:

$$(rm)s = r(ms)$$

Proposición 4.8. *Si ${}_RM_S$, entonces para cada $r \in R$ el mapeo $\mu_r : M \to M$ dado por $\mu_r(x) = rx$, es un S-homomorfismo.*

Igualmente para cada $s \in S$ el mapeo $\lambda_s : M \to M$ dado por $\lambda_s(x) = xs$, es un R-homomorfismo.

Demostración. Tenemos que:

$\mu_r(x+y) = r(x+y) = rx + ry = \mu_r(x) + \mu_r(y)$

$\mu_r(xs) = r(xs) = (rx)s = \mu_r(x)s.$

La prueba de λ_s es completamente análoga. □

Ejemplo 4.1. Cada anillo R es un R-R-bimódulo.

Ejemplo 4.2. Si R es un anillo conmutativo, entonces cada R-módulo izquierdo M, es un R-módulo derecho si definimos $mr := rm$, y de hecho ${}_RM_R$. De la misma forma, cada R-módulo derecho es un R-R-bimódulo.

Ejemplo 4.3. Cada R-módulo izquierdo es un R-$\mathbb{Z}$-bimódulo y también cada R-módulo derecho es un $\mathbb{Z}$-R-bimódulo.

Ejemplo 4.4. Si R es un anillo conmutativo, decimos que un anillo S es una R-álgebra si existe un homomorfismo de anillos $\phi : R \to Z(S)$, donde $Z(S)$ denota el centro de S. En este caso, S es un R-módulo izquierdo si definimos:

$$rs = \phi(r)s$$

Ya que $\phi(r) \in Z(S)$, entonces esta definición también hace a S un R-módulo derecho.

De hecho se tiene que S es un R-S-bimódulo y un S-R-bimódulo.

Veamos como en el caso de que A o B sean bimódulos, entonces el producto tensorial entre ellos adquiere estructura de módulo.

Proposición 4.9. *Si A_R y $_RB_S$, entonces $A \otimes_R B$ es un S-módulo derecho, donde:*

$$(a \otimes b)s = a \otimes (bs)$$

De la misma forma, si $_SA_R$ y $_RB$, entonces $A \otimes_R B$ es un S-módulo izquierdo, donde:

$$s(a \otimes b) = (sa) \otimes b$$

Demostración. De la proposición 4.6, sabemos que para cada $s \in S$, el mapeo $\lambda_s : B \to B$ dado por $\lambda_s(b) = bs$ es un R-homomorfismo, por lo que podemos definir:

$$\theta : S \to End^r(A \otimes_R B)$$

tal que $\theta(s) = 1_A \otimes \lambda_s$.

Entonces θ es un homomorfismo de anillos con 1, ya que:

(i) $\theta(s_1 + s_2) = 1_A \otimes \lambda_{s_1+s_2} = 1_A \otimes (\lambda_{s_1} + \lambda_{s_2}) = (1_A \otimes \lambda_{s_1}) + (1_A \otimes \lambda_{s_2})$
$= \theta(s_1) + \theta(s_2)$.

(ii) $\theta(s_1 s_2) = 1_A \otimes \lambda_{s_1 s_2} = 1_A \otimes \lambda_{s_1}\lambda_{s_2} = (1_A \otimes \lambda_{s_1}) \circ (1_A \otimes \lambda_{s_2})$
$= \theta(s_1)\theta(s_2)$

(iii) $\theta(1) = 1_A \otimes \lambda_1 = 1_A \otimes 1_B = 1_{A \otimes_R B}$.

Por lo tanto, por lo visto en la unidad I, podemos dar a $A \otimes_R B$ estructura de S-módulo derecho tal que:

$$(a \otimes b)s = (a \otimes b)\theta(s) = (a \otimes b)(1_A \otimes \lambda_s) = a \otimes (bs)$$

tal como queríamos probar.

La demostración en el otro caso, es análoga. □

Corolario 4.10. *Dado $_RB_S$, el funtor $\_ \otimes B$ toma valores en $Mod - S$. De la misma forma, dado $_SA_R$, entonces el funtor $A \otimes_R \_$ toma valores en $S - Mod$.*

Demostración. Lo único que falta ver es que si $f : A \to A'$ es un R-homomorfismo, entonces $f \otimes 1_B$ es un S-homomorfismo, lo cual es cierto ya que:

$$((a \otimes b)s) f \otimes 1_B = (a \otimes (bs)) f \otimes 1_B = f(a) \otimes (bs) = (f(a) \otimes b)s = (a \otimes b)(f \otimes 1_B)s$$

La prueba del otro caso es análoga. □

Una propiedad inportante del producto tensorial es la siguiente:

Proposición 4.11. *Para cada $_RB$ hay un R-isomorfismo $R \otimes_R B \approx B$ tal que $r \otimes b \mapsto rb$. De la misma forma, para cada A_R hay un R-isomorfismo $A \otimes_R R \approx A$ tal que $a \otimes r \mapsto ar$.*

Demostración. Ya que R es un R-R-bimódulo, entonces por la proposición 4.7, $R \otimes_R B$ es un R-módulo izquierdo.

Ahora bien, si definimos $h : R \times B \to B$ tal que $h(r, b) = rb$, entonces las propiedades de R-módulo izquierdo implican que h es una función R-biaditiva, y por la propiedad universal del producto tensorial, sabemos que existe un homomorfismo $\theta : R \otimes_R B \to B$ tal que $\theta(r \otimes b) = h(r, b) = rb$, y es fácil verificar que θ es en realidad un R-homomorfismo.

Por otro lado, si definimos $\phi : B \to R \otimes_R B$ tal que $\phi(b) = 1 \otimes b$, entonces un cálculo directo demuestra que ϕ es un R-homorfismo, el cual es el inverso de θ, lo que prueba que θ es un R-isomorfismo.

La prueba del otro caso es análoga. □

4.6. Preservación de Sumas Directas del Funtor Tensorial

En esta sección vemos que el funtor tensorial preserva sumas directas en cada una de las variables.

Proposición 4.12. *Sean A_R y $\{B_i\}$ una familia de R-módulos izquierdos. Entonces existe un isomorfismo de grupos abelianos:*

$$\theta : A \otimes_R (\bigoplus B_i) \to \bigoplus (A \otimes_R B_i)$$

tal que:

$$\theta(a \otimes (b_i)) = (a \otimes b_i)$$

De la misma forma hay un isomorfismo si la suma directa se encuentra en la primera variable.

Demostración. Sea $h : A \times (\bigoplus B_i) \to \bigoplus (A \otimes B_i)$ tal que $h(a, (b_i)) = (a \otimes b_i)$, entonces es fácil ver que h es una función R-biaditiva, por lo que por la propiedad universal del producto tensorial, existe un único homomorfismo $\theta : A \otimes_R (\bigoplus B_i) \to \bigoplus (A \otimes B_i)$ tal que $\theta(a \otimes (b_i)) = (a \otimes b_i)$.

Por otro lado, para cada i sea $f_i = 1_A \otimes \lambda_i$ donde $\lambda_i : B_i \to \bigoplus B_i$ son las inclusiones, así que por la propiedad universal de la suma directa, existe un único homomorfismo $\phi : \bigoplus (A \otimes_R B_i) \to A \otimes (\bigoplus B_i)$ tal que $\phi \mu_i = f_i, \forall i$, en donde $\mu_i : A \otimes_R B_i \to \bigoplus (A \otimes_R B_i)$ son las inclusiones.

Tenemos entonces que:

$$\theta \phi(a \otimes b_i) = \theta(a \otimes (b_i)) = (a \otimes b_i)$$

lo que demuestra que $\theta\phi$ es el homomorfismo identidad, y análogamente se prueba que $\phi\theta$ también es el homomorfismo identidad.

La prueba para el otro funtor tensorial, es análoga. □

4.7. Exactitud Derecha del Funtor Tensorial

En esta sección vemos que el funtor tensorial es un funtor exacto derecho en las dos variables. Como mencionamos al inicio de esta unidad, el funtor tensorial y el funtor Hom tienen propiedades casi duales, pero con sus diferencias. Enlistamos las propiedades de cada uno a continuación:

- El funtor tensorial es covariante en ambas variables, mientras que el funtor Hom es covariante en una variable y contravariante en la otra variable.
- El funtor tensorial preserva sumas directas en ambas variables, mientras que el funtor Hom preserva producto directos en una variable, y convierte sumas directas en productos directos en la otra variable.
- En esta sección vemos que el funtor tensorial es exacto derecho en ambas variables, mientras que el funtor Hom es exacto izquierdo en ambas variables.

Teorema 4.13. *Los funtores $M \otimes_R \_$ y $\_ \otimes_R N$ son funtores exactos derechos.*

Demostración. Dada la sucesión exacta:

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

queremos probar que la sucesión:

$$M \otimes_R A \xrightarrow{1_M \otimes \alpha} M \otimes_R B \xrightarrow{1_M \otimes \beta} M \otimes_R C \longrightarrow 0$$

es exacta. Para empezar vemos que:

$$(1_M \otimes \beta)(1_M \otimes \alpha) = 1_M \otimes (\beta\alpha) = 1_M \otimes 0 = 0$$

lo que implica que $K = Im(1_M \otimes \alpha) \subset ker(1_M \otimes \beta)$.

De esto se sigue por el Teorema del Factor que existe un único homomorfismo $\overline{\beta} : (M \otimes_R B)/K \to M \otimes_R C$ tal que $\overline{\beta}\pi = 1_M \otimes \beta$, donde π es la proyección canónica. Por lo tanto, $\overline{\beta}(m \otimes b + K) = m \otimes \beta(b)$.

Ahora afirmamos que $\overline{\beta}$ es un isomorfismo, y para probarlo exhibimos el homomorfismo inverso como sigue:

Sea $f : M \times C \to (M \otimes_R B)/K$ tal que $f(m, c) = m \otimes b + K$, donde $\beta(b) = c$; entonces vemos que f está bien definida ya que si $\beta(b') = c$, se sigue que $\beta(b' - b) = 0$ de donde $b' - b \in ker\beta = Im\alpha$ por lo que existe $a \in A$ tal que $b' - b = \alpha(a)$, y de aquí se obtiene que:

$$(m \otimes b') - (m \otimes b) = m \otimes (b' - b) = m \otimes \alpha(a) = (1_M \otimes \alpha)(m \otimes a) \in K$$

Ahora bien, es fácil ver que f es R-biaditiva, por lo que por la propiedad universal del producto tensorial, sabemos que existe un único homomorfismo:

$$\phi : M \otimes_R C \to (M \otimes_R B)/K$$

tal que $\phi(m \otimes c) = m \otimes b + K$, donde $\beta(b) = c$, y un cálculo directo demuestra que $\overline{\beta}$ y ϕ son homomorfismos inversos.

Como $\overline{\beta}$ es isomorfismo, entonces:

$$ker(1_M \otimes \beta) = ker(\overline{\beta}\pi) = ker\pi = K = Im(1_M \otimes \alpha)$$

Finalmente, dado $\sum m_i \otimes c_i \in M \otimes_R C$, como β es epimorfismo, entonces para cada i se tiene que $\beta(b_i) = c_i$, y de aquí que

$$(1_M \otimes \beta)(\sum m_i \otimes b_i) = \sum m_i \otimes \beta(b_i) = \sum m_i \otimes c_i$$

lo que demuestra que $1_M \otimes \beta$ es epimorfismo.

La prueba de que el funtor $\_ \otimes_R N$ es exacto derecho, es completamente análoga. $\square$

4.8. Teorema del Isomorfismo Adjunto

En esta sección vemos el importantísimo Teorema del Isomorfismo Adjunto, el cual establece cual es la relación que existe entre el funtor tensorial y el funtor Hom, y de hecho esta es la razón de fondo por la que las propiedades de ambos funtores son como hemos mencionado, casi duales.

Teorema 4.14. *(***Teorema del Isomorfismo Adjunto***)*
Sean ${}_RA$, ${}_SB_R$ y ${}_SC$, entonces existe un isomorfismo de grupos abelianos:

$$\tau : Hom_S(B \otimes_R A, C) \to Hom_R(A, Hom_S(B, C))$$

Análogamente, si A_R, ${}_RB_S$ y C_S, entonces hay un isomorfismo:

$$\tau' : Hom_S(A \otimes_R B, C) \to Hom_R(A, Hom_S(B, C))$$

Demostración. Ya que ${}_SB_R$, se sigue de la proposición 4.7 que $B \otimes_R A$ es un S-módulo izquierdo, por lo que tiene sentido hablar del $Hom_S(B \otimes_R A, C)$. Asimismo, es un ejercicio fácil demostrar que $Hom_S(B, C)$ es un R-módulo izquierdo bajo la operación $(rf)(b) = f(br)$, por lo que también tiene sentido hablar de $Hom_R(A, Hom_S(B, C))$.

Definimos $\tau : Hom_S(B \otimes_R A, C) \to Hom_R(A, Hom_S(B, C))$ como sigue: si $f : B \otimes_R A \to C$ y $a \in A$, entonces definimos $\tau(f)(a) : B \to C$ como $\tau(f)(a)(b) = f(b \otimes a)$. Es rutina verificar que $\tau(f)(a) \in Hom_S(B, C)$, y asimismo que $\tau(f)$ es un R-homomorfismo, por lo que τ está bien definida. Además se comprueba fácilmente que $\tau(f_1 + f_2) = \tau(f_1) + \tau(f_2)$ por lo que τ efectivamente es un homomorfismo.

Definimos $\sigma : Hom_R(A, Hom_S(B, C)) \to Hom_S(B \otimes_R A, C)$ como sigue: si $g : A \to Hom_S(B, C)$ entonces definimos $\sigma(g) : B \otimes_R A \to C$ de tal forma que $\sigma(g)(b \otimes a) = g(a)(b)$. Nuevamente con un cálculo de rutina se verifica que $\sigma(g)$ existe y es un S-homomorfismo, por lo que σ está bien definida, y asimismo es fácil comprobar que $\sigma(g_1 + g_2) = \sigma(g_1) + \sigma(g_2)$, por lo que σ es un homomorfismo.

Finalmente, tenemos que $\tau(\sigma(g))(a)(b) = \sigma(g)(b \otimes a) = g(a)(b), \forall a \in A$ y $\forall b \in B$, de donde $\tau(\sigma)(g) = g$, es decir, $\tau\sigma = 1$.

De la misma forma, $\sigma(\tau(f))(b \otimes a) = \tau(f)(a)(b) = f(b \otimes a), \forall a \in A$ y $\forall b \in B$, de donde $\sigma(\tau(f)) = f$, es decir, $\sigma\tau = 1$.

La segunda parte es completamente análoga. □

Si hacemos $F = B \otimes_R \_$ y $G = Hom_S(B, \_\,)$, entonces el Teorema del Isomorfismo Adjunto nos dice que:

$$Hom_S(FA, C) \approx Hom_R(A, GC)$$

y esta es la razón por la cual se le llama isomorfismo adjunto (recordando la definición del operador adjunto en Álgebra Lineal).

4.9. Funtores Adjuntos

El Teorema del Isomorfismo Adjunto, motiva la definición de funtores adjuntos que damos a continuación, pero antes recordamos que si $\alpha : A \to B$ y $F = Hom(X, \_\,)$, entonces usamos la notación $F(\alpha) = \alpha_*$, en donde $\alpha_*(f) = \alpha f$; asimismo, si $G = Hom(\_\,, X)$, entonces usamos la notación $G(\alpha) = \alpha^*$ en donde $\alpha^*(g) = g\alpha$.

Definición 4.5. Sean $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, un par de funtores covariantes. Decimos que (F, G) es una pareja de **funtores adjuntos** si para cada $C \in$ obj $\mathcal{C}$ y $D \in$ obj $\mathcal{D}$ hay una biyección:

$$\tau = \tau_{C,D} : Hom_{\mathcal{D}}(FC, D) \to Hom_{\mathcal{C}}(C, GD)$$

la cual es natural en cada variable, lo cual significa que para cualesquier $f \in Hom_{\mathcal{C}}(C', C)$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{D}}(FC, D) \arrow[r, "(Ff)^*"] \arrow[d, "\tau_{C,D}"'] & Hom_{\mathcal{D}}(FC', D) \arrow[d, "\tau_{C',D}"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(C, GD) \arrow[r, "f^*"'] & Hom_{\mathcal{C}}(C', GD)
\end{tikzcd}$$

y asimismo, para cualesquier $g \in Hom_{\mathcal{D}}(D, D')$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{D}}(FC, D) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\tau_{C,D}"'] & Hom_{\mathcal{D}}(FC, D') \arrow[d, "\tau_{C,D'}"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(C, GD) \arrow[r, "(Gg)_*"'] & Hom_{\mathcal{C}}(C, GD')
\end{tikzcd}$$

Tenemos entonces el siguiente:

Teorema 4.15. *Si ${}_SB_R$, entonces $(B \otimes_R \_\,, Hom_S(B, \_\,))$ es una pareja de funtores adjuntos.*

Demostración. Para cada A y C, el teorema 4.3 nos proporciona del isomorfismo $\tau = \tau_{A,C}$, y por simple evaluación, se checa fácilmente la conmutatividad de los dos cuadrados anteriores. □

Finalizamos esta unidad con algunas implicaciones de que (F, G) sea una pareja de funtores adjuntos, pero omitimos las demostraciones porque se salen de los propósitos del curso.

Teorema 4.16. *Sean $F : Mod-R \to Mod-S$ y $G : Mod-S \to Mod-R$ funtores. Si (F, G) es una pareja de funtores adjuntos, entonces F es un funtor exacto derecho y G es un funtor exacto izquierdo.*

Por lo tanto, de acuerdo al teorema 4.4 podemos concluir que el funtor $B \otimes_R \_$ es exacto derecho, y el funtor $Hom_S(B, \_\ )$ es exacto izquierdo, dos hechos que ya sabíamos con anterioridad, pero el objetivo de mencionarlos en esta parte, es para apuntar el hecho de que en realidad no son resultados aislados, sino consecuencia de la relación que hay entre el funtor tensorial y el funtor Hom.

Otro resultado interesante es el siguiente:

Teorema 4.17. *Sean $F : Mod-R \to Mod-S$ y $G : Mod-S \to Mod-R$ funtores. Si (F, G) es una pareja de funtores adjuntos, entonces F preserva límites directos y G preserva límites inversos.*

Nuevamente, por el teorema 4.4, podemos concluir que el funtor $B \otimes_R \_$ preserva límites directos, y en particular, preserva sumas directas, mientras que el funtor $Hom_S(B, \_\ )$ preserva límites inversos, y en particular, preserva productos directos. De nueva cuenta, estos resultados ya los probamos con anterioridad, pero lo interesante aquí es ver que son consecuencia de que el funtor tensorial y el funtor Hom son adjuntos.

4.10. Ejercicios Resueltos

EJERCICIO 4.27. Probar cada uno de los siguientes incisos:

(a) Si ${}_RA_S$ y ${}_RB$, entonces $Hom_R(A, B)$ es un S-módulo izquierdo si definimos

$$(sf)(a) = f(as).$$

(b) Si ${}_RA_S$ y B_S, entonces $Hom_S(A, B)$ es un R-módulo derecho si definimos

$$(fr)(a) = f(ra).$$

(c) Si A_R y ${}_SB_R$, entonces $Hom_R(A, B)$ es un S-módulo izquierdo si definimos

$$(sf)(a) = s(f(a)).$$

(d) Si ${}_SA$ y ${}_SB_R$, entonces $Hom_S(A, B)$ es un R-módulo derecho si definimos

$$(fr)(a) = f(a)r.$$

EJERCICIO 4.28. Si B es un R-módulo izquierdo, demuestre que existe un R-isomorfismo, $Hom_R(R, B) \simeq B$, dado por $f \mapsto f(1)$. Similarmente la misma fórmula da un R-isomorfismo de R-módulos derechos cuando B es un R-módulo derecho.

EJERCICIO 4.29. Demostrar que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$.

EJERCICIO 4.30. Probar que si M es un grupo abeliano de torsión, es decir, cada elemento de M es de orden finito, entonces $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

EJERCICIO 4.31. Sea $n > 0$, demostrar que el funtor $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \_$ no es exacto.

EJERCICIO 4.32. Si R es un anillo conmutativo y A y B son R-módulos, demostrar que hay un R-isomorfismo $A \otimes_R B \simeq B \otimes_R A$.

EJERCICIO 4.33. Sea R un anillo y sean $L \leq {}_RR$ e $I \leq R_R$. Probar que:

(a) Para cada R-módulo ${}_RM$ hay un isomorfismo de grupos abelianos:

$$R/I \otimes_R M \simeq M/IM$$

(b) $R/I \otimes_R R/L \simeq R/(I + L)$.

(c) Si $m, n \in \mathbb{N}$ y si $d = (m, n)$ es el máximo común divisor de m y n, entonces $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_d$.

Gustavo Tapia Sánchez *(gtapia@uacj.mx)*
Luis Loeza Chin *(luis.loeza@uacj.mx)*
Francisco Ávila Álvarez *(favila@uacj.mx)*
Instituto de Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.
Ave. del Charro 450 Norte, Partido Romero, Ciudad Juárez, Chihuahua, México, 32310.

CAPÍTULO

5 Clases de Módulos

Finalizamos el presente libro con esta unidad, en donde estudiamos algunas clases de módulos como son las de los módulos libres, proyectivos e inyectivos, para concluir con una breve presentación de los módulos semisimples. Existen muchas otras clases de módulos las cuales por motivos de espacio (y tiempo real de un curso sobre el tema) no fue posible incluir, pero en todo caso, con las bases presentadas aquí, no debe haber mayor problema para que el lector consulte estos tópicos en cualquiera de los libros de la bibliografía.

5.1. Módulos Libres

Los módulos libres son la generalización del hecho de que todo espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, posee bases. Es de esperarse que este resultado no sea válido para módulos sobre un anillo arbitrario R, pero precisamente son de interés tanto los módulos que poseen bases, como los anillos R para los cuales todo R-módulo posee bases.

Definición 5.1. Si R es un anillo y $M \in Mod - R$, decimos que M es un **R-módulo libre** si M contiene una base libre $\{m_i | i \in I\} \subset M$, es decir, cada $x \in M$ se escribe en forma única como R-combinación lineal de la base, esto es:

$$x = \sum_{i \in I} m_i r_i$$

donde $r_i \in R$ y $r_i = 0$ para casi toda i.

En Álgebra Lineal se ve que si $dim_{\mathbb{K}}V = n$, entonces $V \approx \mathbb{K}^{(n)}$ y más generalmente, si α es un cardinal infinito y $dim_{\mathbb{K}}V = \alpha$, entonces $V \approx \mathbb{K}^{(\alpha)}$ donde $\mathbb{K}^{(\alpha)}$ denota la suma directa de α copias de $\mathbb{K}$. Este resultado se generaliza a módulos libres.

Teorema 5.1. *Sea $M \in Mod - R$ es un módulo libre si y solo si $M_R \approx R^{(I)}$ para algún conjunto I.*

Demostración. " $\Rightarrow$ " Supongamos que M es R-módulo libre y sea $\{m_i | i \in I\}$ una base libre de M. Entonces definimos la siguiente función:

$$f : R^{(I)} \to M$$

tal que $(r_i) \mapsto \sum m_i r_i$.

Ya que $r_i = 0$ para casi toda i, entonces f está bien definida, pero además es fácil verificar que f es un R-homomorfismo.

Por otro lado, si $f((r_i)) = 0$, entonces $\sum m_i r_i = 0$ y por la unicidad de la definición de base libre, se sigue que $r_i = 0, \forall i \in I$, de donde $(r_i) = (0)$ lo que demuestra que f es inyectiva.

Asimismo, si $x \in M$, entonces $x = \sum_{i \in I} m_i r_i$ donde $r_i = 0$ para casi toda i, lo que implica que $(r_i) \in R^{(I)}$ y $f((r_i)) = \sum m_i r_i = x$, con lo cual queda demostrado que f es suprayectiva.

" $\Leftarrow$ " Ahora supongamos que $M_R \approx R^{(I)}$, y bastará entonces con demostrar que $R^{(I)}$ es libre, lo cual es obvio ya que contiene la base canónica $\{e_i | i \in I\}$ donde para cada $j \in I$ se define $e_j = (r_i)$ tal que $r_i = 0$ si $i \neq j$ y $r_i = 1$ si $i = j$. □

Corolario 5.2. *Suma directa de módulos libres, es libre.*

Demostración. Supongamos que $\{M_i\}$ es una familia de R-módulos libres. Entonces por el teorema 5.1, se tiene que $M \approx R^{(I_i)}$ para algún conjunto I_i y para cada $i \in I$. Pero entonces:

$$\bigoplus_{i \in I} M_i \approx \bigoplus_{i \in I} R^{(I_i)}$$

que claramente es libre. □

De la prueba dada en el recíproco del teorema 5.1, se sigue que dado cualquier cardinal α existe un R-módulo libre M, el cual contiene una base $X \subset M$ tal que $| X | = \alpha$, a saber, $M = R^{(I)}$ donde I es cualquier conjunto con $| I | = \alpha$.

Proposición 5.3. *Si $M \in Mod - R$ es libre y finitamente generado, entonces todas las bases de M son finitas.*

Demostración. Supongamos que $A = \{m_i | i \in I\}$ es una base libre de M, y sea:

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset M$$

tal que $M = \langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle$.

Como A es base de M, entonces cada v_i se escribe como una R-combinación lineal de elementos de A, y como el conjunto de las v_i's es finito, entonces es claro que existe un subconjunto $A' \subset A$ tal que $\langle A' \rangle = M$. Pero por la unicidad de la expresión en las R-combinaciones lineales de A, se sigue entonces que $A' = A$, lo que demuestra que A es una base finita. □

Teorema 5.4. *Si M_R es un módulo libre pero no es finitamente generado, entonces cualquier base libre de M es infinita, y además, todas las bases libres de M tienen el mismo número cardinal.*

Demostración. Como M no es finitamente generado, es claro que cualquier base libre de M debe ser infinita.

Ahora supongamos que A y B son bases libres de M_R, entonces para cada $b \in B$ existe un subconjunto finito de A al cual denotamos por $A(b)$ tal que $b \in \langle A(b) \rangle$. Por lo tanto si hacemos

$$A' = \bigcup_{b \in B} A(b)$$

Se sigue entonces que:

$$| A' | \leq \aleph_0 \mid B \mid = \mid B \mid$$

Y ya que B genera a M y $b \in \langle A(b) \rangle$, $\forall b \in B$, entonces es claro que $\langle A' \rangle = M$, pero entonces como $A' \subset A$, la igualdad anterior y la unicidad dada por A implica que $A' = A$, de donde:

$$| A | = | A' | \leq | B |$$

Invirtiendo los papeles de A y B, se obtiene la otra desigualdad y por lo tanto la igualdad. □

Esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 5.2. Si M_R es libre y no es finitamente generado, entonces de define el **rango** de M, denotado como $rank(M)$, como el cardinal de cualquier base de M.

La definición anterior no puede hacerse si M_R es finitamente generado, ya que es posible hallar un módulo libre M con dos bases finitas con distinto número cardinal. De hecho veremos el ejemplo en breve, pero antes vemos un resultado interesante a este mismo respecto.

Sea $\mathfrak{F}$ una base libre finita de M_R y sea $\mathfrak{G} \subset M$ finito, digamos que:

$$\mathfrak{F} = \{f_1, \ldots, f_m\}$$

$$\mathfrak{G} = \{g_1, \ldots, g_n\}$$

Entonces existen únicos $a_{ij} \in R$ tales que:

$$\begin{array}{rcl} g_1 & = & f_1 a_{11} + \ldots + f_m a_{m1} \\ g_2 & = & f_1 a_{12} + \ldots + f_m a_{m2} \\ & \vdots & \\ g_n & = & f_1 a_{1n} + \ldots + f_m a_{mn} \end{array}$$

Y vemos que si definimos las matrices $\mathfrak{F} = (f_1 \cdots f_m)$, $A = (a_{ij})$ y $\mathfrak{G} = (g_1 \cdots g_n)$, las ecuaciones anteriores pueden abreviarse como $\mathfrak{F}A = \mathfrak{G}$.

Teorema 5.5. *Con la notación anterior, $\mathfrak{G}$ es base libre de M_R si y solo si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(R)$ es una matriz invertible, y esto último significa que existe $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(R)$ tal que $AB = I_m$ y $BA = I_n$.*

Demostración. " $\Rightarrow$ " Supongamos que $\mathfrak{G}$ es base libre de M, entonces existe una única matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(R)$ tal que:

$$\mathfrak{G}B = \mathfrak{F}$$

Pero entonces tenemos que:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}B = (\mathfrak{F}A)B = \mathfrak{F}(AB)$$

Y por la unicidad por ser $\mathfrak{F}$ base libre, se sigue que:

$$AB = I_m$$

Análogamente tenemos que:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}A = (\mathfrak{G}B)A = \mathfrak{G}(BA)$$

Y por la unicidad por ser $\mathfrak{G}$ base libre, se sigue que:

$$BA = I_n$$

Por lo tanto, A es una matriz invertible.

" $\Leftarrow$ " Ahora supongamos que A es una matriz invertible con inversa B. Entonces tenemos que:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}I_m = \mathfrak{F}(AB) = (\mathfrak{F}A)B = \mathfrak{G}B$$

Lo que claramente implica que $\mathfrak{G}$ genera a M. Para demostrar que $\mathfrak{G}$ es linealmente independiente, suponemos que $\overline{\alpha} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(R)$ es tal que $\mathfrak{G}\overline{\alpha} = \overline{0}$, de donde $(\mathfrak{F}A)\overline{\alpha} = \overline{0}$ lo que nos lleva a que $\mathfrak{F}(A\overline{\alpha}) = \overline{0}$ y como $\mathfrak{F}$ es base libre, entonces $A\overline{\alpha} = \overline{0}$ lo que implica que:

$$\overline{\alpha} = I_n\overline{\alpha} = (BA)\overline{\alpha} = B(A\overline{\alpha}) = B\overline{0} = \overline{0}$$

Con lo cual queda probado que $\mathfrak{G}$ es linealmente independiente, y por lo tanto $\mathfrak{G}$ es base libre de M. $\square$

Definición 5.3. Sea R un anillo, decimos que R tiene **IBN** (por las siglas en inglés de invariant bases number) si para todo módulo libre $M \in Mod - R$, cada base de M tiene el mismo número cardinal.

Por el teorema anterior, se sigue que R tiene IBN si y solo si toda matriz invertible con entradas en R, necesariamente tiene que ser una matriz cuadrada.

Ejemplo 5.1. Si R es un campo, entonces R tiene IBN.

Ejemplo 5.2. Sea $\mathbb{K}$ un campo y V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión infinita. Entonces $V \approx \mathbb{K}^{(\alpha)}$, donde $\alpha = dim_{\mathbb{K}}V$, y es claro que:

$$V \oplus V \approx \mathbb{K}^{(\alpha)} \oplus \mathbb{K}^{(\alpha)} \approx \mathbb{K}^{(\alpha)} \approx V$$

De aquí se sigue que:

$$End_{\mathbb{K}}(V) \approx Hom(V, V \oplus V) \approx End_{\mathbb{K}}(V) \oplus End_{\mathbb{K}}(V)$$

Es decir, el anillo $R = End_{\mathbb{K}}(V)$ tiene la propiedad de que $R \approx R \oplus R$, y de aquí se ve que R tiene una base con 1 elemento, y otra base con 2 elementos.

Por lo tanto, R no tiene IBN.

Proposición 5.6. *Sean R y S anillos donde S tiene IBN. Si se cumplen cualquiera de las siguientes condiciones:*

(i) Existe $\phi : R \to S$ homomorfismo de anillos.

(ii) R es un subanillo de S.

(iii) R es anillo conmutativo.

Entonces R tiene IBN.

Demostración. (i) Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(R)$ matriz invertible, con inversa $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(R)$. Entonces definimos las matrices $\phi(A) \in \mathcal{M}_{m\times n}(S)$ y $\phi(B) \in \mathcal{M}_{n\times m}(S)$, y tenemos que:

$$\phi(A)\phi(B) = \phi(AB) = \phi(I_m) = I_m(S)$$

$$\phi(B)\phi(A) = \phi(BA) = \phi(I_n) = I_n(S)$$

Por lo tanto, $\phi(A)$ es matriz invertible, y como S tiene IBN, entonces $n = m$, con lo cual queda demostrado que R tiene IBN.

(ii) Es obvio, si definimos $\phi : R \to S$ como la inclusión y aplicamos (i).

(iii) Supongamos que R es un anillo conmutativo (con 1),entonces por el lema de Zorn, existe M un ideal maximal de R, de donde R/M es un campo, el cual tiene IBN. El resultado se sigue entonces por el inciso (i) si definimos $\phi : R \to R/M$ como la proyección natural. □

Teorema 5.7. *(**Propiedad Universal de los Módulos Libres**)*
Sea M_R, entonces M es libre si y solo si existe $X \subset M$ tal que para cualquier N_R si $f : X \to N$ es una función, entonces existe un único R-homomorfismo $\phi : M \to N$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & M \arrow[dl, dashed, "\exists!\phi"] \\
& N &
\end{tikzcd}$$

Demostración. " $\Rightarrow$ " Supongamos que M_R es libre con base libre $X = \{m_i | i \in I\}$, y sea N_R y $f : X \to N$ una función. Por lo tanto, si queremos que el diagrama anterior sea conmutativo, necesariamente se debe cumplir que $f(m_i) = \phi(m_i)$, por lo que estamos obligados a definir $\phi : M \to N$ como sigue: para cada $m \in M$ existen únicos $r_i \in R$ (casi todos cero) tales que $m = \sum m_i r_i$, por lo que hacemos:

$$\phi(m) = \phi(\sum m_i r_i) = \sum \phi(m_i) r_i = \sum f(m_i) r_i$$

Es fácil verificar que ϕ es el único R-homomorfismo que extiende a f.

" $\Leftarrow$ " Ahora supongamos que existe $X = \{m_i | i \in I\} \subset M$ con la propiedad enunciada. Por la hipótesis, existe un único R-homomorfismo ϕ que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & M \arrow[dl, dashed, "\exists!\phi"] \\ & R^{(I)} & \end{tikzcd}$$

donde $f(m_i) = e_i$ y $Y = \{e_i\}$ es la base canónica de $R^{(I)}$.

Por otro lado, como $R^{(I)}$ es libre, se sigue por lo ya demostrado en " $\Rightarrow$ ", que existe un único R-homomorfismo ψ que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, hook, "j"] \arrow[dr, "g"'] & & R^{(I)} \arrow[dl, dashed, "\exists!\phi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

donde $g(e_i) = m_i$. Pero entonces, $\forall m_\alpha \in X$, tenemos que:

$$(\psi\phi i)(m_\alpha) = \psi(\phi i(m_\alpha)) = \psi(f(m_\alpha)) = \psi(e_\alpha) = g(e_\alpha) = m_\alpha = i(m_\alpha)$$

Y de aquí se sigue que $\psi\phi i = i$. Pero por hipótesis sabemos que existe un único R-homomorfismo que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "i"'] & & M \arrow[dl, dashed, "\exists!\tau"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

El cual claramente debe ser 1_M, por lo que hemos probado que $\psi\phi = 1_M$. Por un razonamiento análogo también se tiene que $\phi\psi = 1_{R^{(I)}}$, lo que implica que $M \approx R^{(I)}$ que es libre. □

Ejemplo 5.3. Sea $R = \mathbb{Z}_6$ el anillo de los enteros módulo 6, y consideremos los ideales $2R$ y $3R$, entonces es fácil ver que $R = 2R \oplus 3R$. Ahora bien, sabemos que R es R-módulo libre (por ser suma directa de copias de R), pero ni $2R$ ni $2R$ pueden ser libres, ya que el primero tiene solo 3 elementos y el segundo, 2, por lo que de ninguna forma pueden ser isomorfos a una suma directa de copias de R.

Este ejemplo demuestra varias cosas:

- Submódulo de un libre, no tiene por que ser libre.

- Sumando directo de un libre, no tiene por que ser libre.
- Dado cualquier anillo R, no todo R-módulo tiene por que ser libre.
- Cociente de un libre, no tiene por que ser libre.

Sin embargo, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 5.8. *Sean R un anillo y M_R, entonces M es imagen homomórfica de un R-módulo libre, es decir, existe F_R libre y un epimorfismo:*

$$F \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0$$

Por lo tanto, $M \approx F/ker\phi$ y se dice que M es cociente de un libre.

Demostración. Sea $X \subset M$ tal que $\langle X \rangle = M$ (por ejemplo $X = M$) digamos que $X = \{m_i | i \in I\}$, y sea $\phi : R^{(I)} \to M$ tal que $\phi((r_i)) = \sum m_i r_i$.

Es claro que ϕ es R-homomorfismo, pero además si $m \in M$ entonces $m = \sum m_i r_i$ para algunos $r_i \in R$ casi todos 0, de donde $(r_i) \in R^{(I)}$ y $\phi((r_i)) = \sum m_i r_i = m$, con lo cual queda demostrado que ϕ es suprayectiva. □

Como consecuencia de la prueba dada en el teorema 5.5, tenemos:

Corolario 5.9. *Si M_R es finitamente generado, entonces existe un R-epimorfismo:*

$$R^n \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0$$

donde $n \in \mathbb{N}$.

Finalizamos esta sección con el siguiente resultado:

Teorema 5.10. *Si F es un R-módulo libre, entonces el funtor $Hom_R(F, \_\ )$ es exacto.*

Demostración. Sabemos que el funtor $Hom_R(F, \_\ )$ es exacto derecho, así que lo que debemos probar es que si

$$M \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces la sucesión:

$$Hom_R(F, M) \xrightarrow{\beta^*} Hom_R(F, N) \longrightarrow 0$$

también es exacta, es decir, β^* es suprayectiva.

De acuerdo a la definición de β^*, se sigue que ésta es suprayectiva si y solo si dado cualquier $f : F \to N$, existe $g : F \to M$ tal que $f = \beta^*(g) = \beta g$.

Lo anterior se abrevia diciendo que el siguiente diagrama (con renglón exacto) es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dashed, "\exists g"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "\beta"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Sea $X = \{x_i | i \in I\}$ una base libre de F, de donde $f(x_i) \in N$, y como β es suprayectiva, entonces existe $m_i \in M$ tal que $\beta(m_i) = f(x_i)$ y esto para cada $i \in I$.

Por lo tanto, por el Axioma de Elección podemos definir una función $h : X \to M$ tal que $h(x_i) = m_i$, y por la propiedad universal de los módulos libres, existe un R-homomorfismo $g : F \to M$ tal que $g(x_i) = h(x_i) = m_i$, y de aquí se sigue que:

$$\beta(g(x_i)) = \beta(m_i) = f(x_i)$$

Y claramente esto implica que $\beta g = f$, ya que X es base libre de F. $\square$

5.2. Módulos Proyectivos

Al final de la sección anterior vimos que si F_R es libre, entonces el funtor $Hom_R(F, \_\,)$ es exacto, pero esta propiedad no caracteriza a los módulos libres. De hecho da lugar al concepto de módulo proyectivo.

Definición 5.4. Sea P_R, decimos que P es un **R-módulo proyectivo** si el funtor $Hom_R(P, \_\,)$ es exacto.

De acuerdo a la discusión al final de la sección anterior, se sigue que P_R es proyectivo si y solo si para cada $f : P \to N$ existe $g : P \to M$ tal que el siguiente diagrama (con renglón exacto) es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists g"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "\beta"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ejemplo 5.4. Todo R-módulo libre, es proyectivo.

El recíproco del ejemplo anterior, pero para justificar el ejemplo necesitamos más caracterizaciones de los módulos proyectivos.

Teorema 5.11. *Cada sumando directo de un módulo proyectivo, es proyectivo.*

Demostración. Sea P_R un módulo proyectivo y supongamos que Q es un sumando directo de P. Por lo tanto, sabemos que existen R-homomorfismos $P \underset{\delta}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} Q$ tales que $\beta\delta = 1_Q$.

Para probar que Q es proyectivo, consideremos el diagrama (con renglón exacto):

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "\alpha"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Al cual podemos agregar los R-homomorfismos $P \underset{\delta}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} Q$ para obtener:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, shift left, "\beta"] & Q \arrow[l, shift left, "\delta"] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "\beta"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como P es proyectivo, entonces podemos completar el diagrama anterior:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, shift left, "\beta"] \arrow[d, dashed, "\exists g"'] & Q \arrow[l, shift left, "\delta"] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "\beta"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Entonces si consideramos $g\delta : Q \to M$, se tiene que:

$$\alpha(g\delta) = (\alpha g)\delta = (f\beta)\delta = f(\beta\delta) = f1_Q = f$$

Y de aquí que hemos completado el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "g\delta"'] & \\ M \arrow[r, "\alpha"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Lo que demuestra que Q es proyectivo. $\square$

El siguiente teorema nos proporciona de caracterizaciones de los módulos proyectivos.

Teorema 5.12. *Sea P_R, son equivalentes:*

(i) P es proyectivo.

(ii) Cada sucesión exacta corta de la forma:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

se escinde.

(iii) P es un sumando directo de un módulo libre.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Supongamos que P es proyectivo y sea:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{\beta} P \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta. Ya que P es proyectivo, entonces podemos completar el siguiente diagrama (con renglón exacto):

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists\delta"'] \arrow[d, "1_P"] & \\ A \arrow[r, "\beta"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

De donde $\beta\delta = 1_P$, probando que la sucesión dada, se escinde.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Como todo módulo es cociente de un libre, entonces existe F_R libre y un R-epimorfismo $\beta : F \to P$, lo que nos lleva a la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow ker\beta \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\beta} P \longrightarrow 0$$

La cual, por hipótesis se escinde, y esto implica que:

$$F \approx ker\beta \oplus P$$

Por lo tanto, P es sumando directo de un libre.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Supongamos que P es sumando directo de un libre F_R, el cual es proyectivo. Si aplicamos ahora el teorema 5.7, concluimos que P es proyectivo. $\square$

Teorema 5.13. *Sea $\{P_\alpha | \alpha \in I\}$ una familia de R-módulos, entonces $\bigoplus P_\alpha$ es proyectivo si y solo si P_α es proyectivo para toda $\alpha \in I$.*

Demostración. " $\Rightarrow$ " Si $\bigoplus P_\alpha$ es proyectivo, entonces por el teorema 5.7 se sigue que cada P_α es proyectivo.

" $\Leftarrow$ " Si cada P_α es proyectivo, entonces existe F_α libre tal que P_α es sumando directo de F_α. Pero entonces para cada $\alpha \in I$ existen β_α y δ_α tales que $F_\alpha \underset{\delta_\alpha}{\overset{\beta_\alpha}{\rightleftarrows}} P_\alpha$ y $\beta_\alpha\delta_\alpha = 1_{P_\alpha}$.

Sean $i_\alpha : P_\alpha \to \bigoplus P_\alpha$ y $j_\alpha : F_\alpha \to \bigoplus F_\alpha$ las inclusiones canónicas, entonces $j_\alpha\delta_\alpha : P_\alpha \to \bigoplus F_\alpha$ y por la propiedad universal de la suma directa, existe un único R-homomorfismo $\psi : \bigoplus P_\alpha \to \bigoplus F_\alpha$ tal que:

$$\psi i_\alpha = j_\alpha\delta_\alpha, \ \forall\alpha \in I$$

Por el mismo razonamiento, tenemos que existe un único R-homomorfismo $\phi : \bigoplus F_\alpha \to \bigoplus P_\alpha$ tal que:

$$\phi j_\alpha = i_\alpha\beta_\alpha, \ \forall\alpha \in I$$

Pero entonces tenemos que:

$$\phi\psi i_\alpha = \phi j_\alpha\delta_\alpha = i_\alpha\beta_\alpha\delta_\alpha = i_\alpha 1_{P_\alpha} = i_\alpha$$

Y por la propiedad universal de la suma directa $\bigoplus P_\alpha$, esto implica que $\phi\psi = 1_{\oplus P_\alpha}$, lo que significa que $\bigoplus P_\alpha$ es sumando directo de $\bigoplus F_\alpha$, el cual es libre, y por lo tanto $\bigoplus P_\alpha$ es proyectivo. □

Ejemplo 5.5. Consideremos de nuevo el anillo del ejemplo 5.1.3, es decir $R = \mathbb{Z}_6$, entonces la igualdad $R = 2R \oplus 3R$ demuestra que $2R$ y $3R$ son proyectivos, por ser sumandos directos de un libre. Sin embargo, como ya comentamos en el ejemplo 5.1.3, ni $2R$ ni $3R$ son libres.

Por lo tanto, este ejemplo demuestra que en general, proyectivo no implica libre, es decir, si el funtor $Hom_R(P, \_\,)$ es exacto, esto no implica que P es libre.

Terminamos esta sección con una caracterización de los módulos proyectivos, que de alguna forma se asemeja a las bases duales en álgebra lineal.

Teorema 5.14. *(***Bases Proyectivas***)*
Un R-módulo P es proyectivo si y solo si existen $\{a_i | i \in I\} \subset P$ y un conjunto:

$$\{\varphi_i : P \to R | \varphi_i \text{ es } R\text{-homomorfismo}, \ i \in I\}$$

tales que para cada $x \in P$, se cumple que:

(i) $\varphi_i(x) = 0$ *para casi toda* $i \in I$.

(ii) $x = \sum a_i\varphi_i(x)$.

Demostración. " $\Rightarrow$ " Supongamos que P es proyectivo y sea F_R libre y un R-epimorfismo:

$$F \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow 0$$

Como P es proyectivo, entonces la sucesión anterior se escinde, es decir, existe $\varphi : P \to F$ tal que $\psi\phi = 1_P$.

Sea $\{e_i | i \in I\}$ una base libre de F, y definimos:

$$a_i := \psi(e_i) \text{ para } i \in I$$

Además si $x \in P$, entonces existen únicos $r_i \in R$ casi todos cero, y tales que $\varphi(x) = \sum e_i r_i$, y definimos $\varphi_i : P \to R$ tal que $\varphi_i(x) = r_i$. Es fácil ver que φ_i es un R-homomorfismo, para cada $i \in I$.

Finalmente, para cada $x \in P$ se tiene que:

(i) $\varphi_i(x) = r_i = 0$ para casi toda i

(ii) $x = \psi\varphi(x) = \psi(\sum e_i r_i) = \sum \psi(e_i) r_i = \sum a_i \varphi_i(x)$

" $\Leftarrow$ " Tomemos $\{a_i\}$ y $\{\varphi_i\}$ como en la hipótesis, y sea $F = R^{(I)}$ con $\{e_i | i \in I\}$ base libre de F. Entonces definimos $\psi : F \to P$ tal que $\psi(e_i) = a_i$ para $i \in I$ y se extiende linealmente.

Por otro lado, sea $\varphi : P \to F$ tal que si $x \in P$, entonces $\varphi(x) = \sum e_i \varphi_i(x)$, y nótese que φ está bien definida por la hipótesis (i). Además es fácil ver que φ es un R-homomorfismo.

Para cada $x \in P$ se tiene que:

$$\psi\varphi(x) = \psi(\sum e_i \varphi_i(x)) = \sum \psi(e_i)\varphi_i(x) = \sum a_i \varphi_i(x) = x$$

Por lo tanto, $\psi\varphi = 1_P$, lo que significa que P es sumando directo de F y como F es libre, entonces P es proyectivo. □

5.3. Módulos Inyectivos

El concepto de módulo inyectivo es el dual del de módulo proyectivo.

Definición 5.5. Sea E_R, decimos que E es un **R-módulo inyectivo** si el funtor contravariante $Hom_R(\_\,, E)$ es exacto.

Sabemos que el funtor contravariante $Hom_R(\_\,, E)$ es exacto izquierdo, por lo que un R-módulo E es inyectivo si y solo si para cada sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$$

la sucesión:

$$Hom_R(B,E) \xrightarrow{f^*} Hom_R(A,E) \longrightarrow 0$$

es exacta, es decir, f^* es suprayectiva.

De la definición de f^*, se sigue que ésta es suprayectiva si y solo si para todo $h : A \to E$, existe $f : B \to E$ tal que $h = f^*(g) = gf$.

Todo lo anterior se abrevia diciendo que el siguiente diagrama (con renglón exacto) es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[dl, dashed, "\exists g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

En vista de que en el diagrama anterior f es inyectiva, es costumbre identificar A con $f(A) \leq B$, y pensar entonces que un R-módulo E es inyectivo si y solo si cada R-homomorfismo que sale de un submódulo de B a E, se puede extender a un R-homomorfismo de B a E.

Muchas de las propiedades de los módulos inyectivos, son las duales de los proyectivos.

Teorema 5.15. *Sea $\{E_i | i \in I\}$ una familia de R-módulos. Entonces $\prod E_i$ es inyectivo si y solo si, E_i es inyectivo para toda $i \in I$.*

Demostración. " $\Rightarrow$ " Supongamos que $\prod E_i$ es inyectivo, y sea:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \\ & E_j & \end{tikzcd}$$

Al cual podemos agregarle la inclusión $i_j : E_j \to \prod E_i$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \\ & E_j \arrow[r, hook, "i_j"] & \prod E_i \end{tikzcd}$$

Para usar entonces que $\prod E_i$ es inyectivo, lo que significa que el diagrama anterior se puede completar como sigue:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, dashed, "\exists g"] \\
& E_j \arrow[r, hook, "i_j"] & \prod E_i
\end{tikzcd}$$

Y de aquí se sigue que si $p_j : \prod E_i \to E_j$ es la proyección, entonces:

$$(p_j g)f = p_j(gf) = p_j(i_j h) = (p_j i_j)h = h$$

Lo que demuestra que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[dl, dashed, "p_j g"] \\
& E_j &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, E_j es inyectivo.

" $\Leftarrow$ " Ahora suponemos que E_j es un R-módulo inyectivo para cada $j \in I$, y consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \\
& \prod E_i &
\end{tikzcd}$$

Al cual podemos agregarle la proyección $p_j : \prod E_i \to E_j$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \\
& \prod E_i \arrow[r, "p_j"] & E_j
\end{tikzcd}$$

Para usar entonces que E_j es inyectivo, lo que significa que el diagrama anterior se puede completar como sigue:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, dashed, "g_j"] \\
& \prod E_i \arrow[r, "p_j"] & E_j
\end{tikzcd}$$

Y esto lo hacemos para cada $j \in I$. Entonces por la propiedad universal del producto directo, existe un único R-homomorfismo $\theta : B \to \prod E_i$ tal que $p_j\theta = g_j$ para cada $j \in I$. De aquí se sigue que para cada $j \in$:

$$p_j\theta f = g_j f = p_j h$$

Lo que implica, por la propiedad universal del producto directo, que $\theta f = h$, es decir, hemos completado el diagrama inicial a un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[dl, "\theta"] \\ & \prod E_i & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\prod E_i$ es inyectivo. □

Teorema 5.16. *Cada sumando directo de un R-módulo inyectivo, es inyectivo.*

Demostración. Supongamos que E_R es inyectivo y sea D un sumando directo de E, de donde, existen R-homomorfismos $D \underset{\delta}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} E$ tales que $\delta\lambda = 1_D$.

Ahora consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \\ & D & \end{tikzcd}$$

Al cual le podemos agregar λ:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \\ & D \arrow[r, "\lambda"] & E \end{tikzcd}$$

Para usar entonces que E es inyectivo, lo que significa que el diagrama anterior se puede completar como sigue:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, dashed, "g"] \\ & D \arrow[r, "\lambda"] & E \end{tikzcd}$$

De aquí obtenemos que:

$$(\delta g)f = \delta(gf) = \delta(\lambda h) = (\delta\lambda)h = 1_D h = h$$

De esta forma hemos completado el diagrama inicial como sigue:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[dl, "\delta g"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, D es inyectivo. $\square$

Teorema 5.17. *Un módulo E es inyectivo si y solo si cada sucesión exacta corta:*

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

se escinde. De aquí que E es sumando directo de cualquier módulo que lo contiene.

Demostración. " $\Rightarrow$ " Supongamos que E es inyectivo, y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_E"'] & B \\ & E & \end{tikzcd}$$

Por la inyectividad de E, el diagrama anterior puede completarse como sigue:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_E"'] & B \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Lo que implica que $gi = 1_E$, con lo cual queda probado que la sucesión:

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

se escinde.

" $\Leftarrow$ " Supongamos que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \\ & E & \end{tikzcd}$$

Y construimos el pushout como sigue:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "h'"] \\ & E \arrow[r, "f'"'] & E' \end{tikzcd}$$

Se sigue entonces por la proposición 3.3, que f' es monomorfismo y así, podemos aplicar la hipótesis para encontrar $g : E' \to E$ tal que $gf' = 1_E$. Pero entonces tenemos que:

$$(gh')f = g(h'f) = g(f'h) = (gf')h = 1_E h = h$$

De esta forma, hemos completado el diagrama inicial como sigue:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[dl, "gh'"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto E es inyectivo. □

Una caracterización importante de los módulos inyectivos está dada en el siguiente resultado, el cual resulta muy útil para probar que ciertos módulos son inyectivos.

Teorema 5.18. *(***Criterio de Baer***)*
E_R es inyectivo si y solo si cada R-homomorfismo $f : I \to E$, donde I es cualquier ideal derecho de R, se puede extender a R.

Demostración. " $\Rightarrow$ " Es obvio, por la definición de inyectivo.

" $\Leftarrow$ " Supongamos que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"'] & B \\ & E & \end{tikzcd}$$

Y por simplicidad suponemos que i es la inclusión, es decir, $A \leq B$. Entonces extenderemos h a $g : B \to E$, buscando entre todos los módulos entre A y B para los cuales existe una extensión de h. Formalmente, sea:

$$\mathfrak{G} = \{(A', g') | A \subset A' \subset B \text{ y } g' : A' \to E \text{ extiende a } h\}$$

Vemos que $\mathfrak{G} \neq \emptyset$ ya que $(A, h) \in \mathfrak{G}$, y ordenamos parcialmente a $\mathfrak{G}$ como sigue:

$$(A', g') \leq (A'', g'') \Leftrightarrow A' \subset A'' \text{ y } g'' \text{ extiende a } g$$

Entonces por el Lema de Zorn, existe una pareja maximal $(A_0, g_0) \in \mathfrak{G}$, y queremos probar que $A_0 = B$, por lo que suponemos que $A_0 \subsetneq B$, por lo que existe $x \in B - A_0$. Entonces definimos:

$$I = \{r \in R | xr \in A_0\}$$

Es fácil verificar que I es un ideal derecho de R, y sea $f : I \to E$ tal que $f(r) = g_0(xr)$, el cual por la hipótesis, puede extenderse a $f' : R \to E$.

Pero entonces definimos $A_1 = A_0 + xR$ y $g_1 : A_1 \to E$ tal que:

$$g_1(a_0 + xr) = g_0(a_0) + f'(1)r$$

Y vemos primero que g_1 está bien definido, ya que si $a_0 + xr = a_0^{'} + xr'$, entonces:

$$x(r - r') = a_0^{'} - a_0 \in A_0$$

De donde $g_0(x(r - r'))$ y $f(r - r')$ están definidas, y tenemos que:

$$g_0(a_0^{'} - a_0) = g_0(x(r - r')) = f(r - r') = f'(r - r') = f'(1)(r - r')$$

Lo que implica que:

$$g_0(a_0^{'}) - g_0(a_0) = f'(1)r - f'(1)r'$$

Y de aquí que:

$$g_0(a_0^{'}) + f'(1)r' = g_0(a_0) + f'(1)r$$

Pero entonces g_1 extiende a g_0 ya que $g_1(a_0) = g_0(a_0)$ para todo $a_0 \in A_0$, y de este modo hemos construído una pareja $(A_1, g_1) \in \mathfrak{G}$ que es estrictamente mayor que la pareja maximal (A_0, g_0), una contradicción.

En conclusión, $A_0 = B$ y E es inyectivo. □

5.4. Módulos Divisibles

Hay una clase de módulos que para algunos anillos coincide con la clase de los inyectivos, aunque en general solamente se tiene una implicación. A nosotros nos será de utilidad para demostrar que todo módulo puede incluirse en un módulo inyectivo.

Definición 5.6. Sean M_R, $m \in M$ y $r \in R$, decimos que m es divisible por r, si $rm' = m$ para algún $m' \in M$. Decimos que M es un **R-módulo divisible** si cada $m \in M$ es divisible por cada $r \in R$, siempre que r no sea un divisor de 0.

Ejemplo 5.6. Si $R = \mathbb{Z}$, entonces $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo divisible.

Esto es claro, ya que para cada $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ y cada $n \in \mathbb{Z}$ con $n \neq 0$, se cumple que $\frac{p}{q} = n\frac{p}{nq}$.

Teorema 5.19. *Todo R-módulo inyectivo, es divisible.*

Demostración. Sea $m \in E$ y $r_0 \in R$ tal que r_0 no es divisor de 0. Definimos $f : r_0R \to E$ tal que $f(r_0r) = mr$, entonces f está bien definida ya que r_0 no es divisor de 0.

Como E es inyectivo, entonces f puede extenderse a $g : R \to E$ y de aquí se tiene que:

$$m = f(r_0) = g(r_0) = g(1)r_0$$

Y como $g(1) \in E$, esto prueba que m es divisible por r_0. □

Algunas propiedades de los módulos divisibles se enuncian a continuación.

Proposición 5.20. *Son válidas:*

(1) Cada cociente de un módulo divisible, es divisible.

(2) Cada sumando directo de un módulo divisible, es divisible.

(3) Producto directo de módulos divisibles, es divisible.

(4) Suma directa de módulos divisibles, es divisible.

Demostración. Las pruebas se siguen simplemente de la definición:

(1) Si M_R es divisible y $N \leq M$, entonces para cada $m + N \in M/N$ y $r \in R$ no divisor de 0, se tiene que existe $m' \in M$ tal que $m = m'r$, de donde $m + N = (m' + N)r$, lo que demuestra que M/N es divisible.

(2) Si M_R es divisible, y $N \leq M$ es un sumando directo, entonces existen R-homomorfismos $N \underset{\delta}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} M$ tales que $\delta\beta = 1_N$. Por lo tanto, si $n \in N$ y $r \in R$ no es divisor de 0, entonces existe $m \in M$ tal que $\beta(n) = mr$, de donde, $n = \delta\beta(n) = \delta(mr) = \delta(m)r$, y como $\delta(m) \in N$, esto demuestra que N es divisible.

(3) Si $\{M_i | i \in I\}$ es una familia de R-módulos divisibles, y $r \in R$ no es divisor de 0, entonces dado cualquier $(m_i) \in \prod M_i$ existen $m_i^{'} \in M_i$ tales que $m_i = m_i^{'}r$ de donde $(m_i) = (m_i^{'}r) = (m_i^{'})r$, lo que demuestra que $\prod M_i$ es divisible.

(4) Es completamente análoga a (3). □

Para algunas clases de anillos vale el recíproco del teorema 5.15, como vemos a continuación.

Teorema 5.21. *Si R es un dominio de ideales principales, entonces un R-módulo D es divisible si y solo si D es inyectivo.*

Demostración. " $\Rightarrow$ " Por el criterio de Baer, es suficiente extender cualquier R-homomorfismo $f : I \to D$ donde $I_R \leq R$. Ya que R es un dominio de ideales principales, sabemos que $I = r_0R$, y es claro que si $r_0 = 0$, no hay nada que demostrar, por lo que suponemos que $r_0 \neq 0$, y como R es dominio, entonces r_0 no es un divisor de 0.

Entonces como D es divisible, existe $d \in D$ tal que $f(r_0) = dr_0$, y podemos definir $g : R \to D$ tal que $g(r) = dr$, el cual claramente extiende a f.

" $\Leftarrow$ " Esta parte es el teorema 5.15. □

En particular, en grupos abelianos el concepto de inyectividad coincide con el de divisibilidad, y esto nos sirve para demostrar el siguiente resultado, el cual es un caso especial de un teorema más general, el cual deseamos probar más adelante.

Teorema 5.22. *Cada grupo abeliano G puede incluirse en un grupo abeliano inyectivo.*

Demostración. La prueba es muy elegante, ya que aplicaremos varios de los resultados vistos hasta ahora.

Sea $G = F/S$ donde F es un grupo abeliano libre, de donde $F = \mathbb{Z}^{(I)}$. Si incluimos cada copia de $\mathbb{Z}$ en una copia de $\mathbb{Q}$, tenemos que:

$$G = F/S = (\mathbb{Z}^{(I)})/S \subset (\mathbb{Q}^{(I)})/S$$

Ya que $\mathbb{Q}$ es divisible, entonces $\mathbb{Q}^{(I)}$ es divisible, de donde $(\mathbb{Q}^{(I)})/S$ es divisible, pero por el teorema 5.16 se sigue entonces que $(\mathbb{Q}^{(I)})/S$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, con lo cual termina la prueba. □

Finalizamos esta sección con un resultado que nos será de utilidad más adelante, pero primero probamos que:

Teorema 5.23. *Sea R un anillo y supongamos que D es un grupo abeliano divisible, entonces $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ es un R-módulo derecho inyectivo.*

Demostración. Ya que ${}_R R_{\mathbb{Z}}$ es fácil ver que $Hom_{\mathbb{Z}}(R,D)$ es un R-módulo derecho donde se define $fr : R \to D$ tal que $(fr)(r') = f(rr')$.

Probaremos entonces que el funtor contravariante $Hom_R(\ \_\ , Hom_{\mathbb{Z}}(R,D))$ es exacto, para lo cual solo es necesario probar que convierte monomorfismos en epimorfismos.

El Teorema del Isomorfismo Adjunto nos lleva a un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom_R(B, Hom_{\mathbb{Z}}(R,D)) \arrow[r] & Hom_R(A, Hom_{\mathbb{Z}}(R,D)) \\
Hom_{\mathbb{Z}}(B,D) \arrow[r] \arrow[u] & Hom_{\mathbb{Z}}(A,D) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

donde $0 \longrightarrow A \longrightarrow B$ es un R-monomorfismo, y donde hemos usado los R-isomorfismos $R \otimes_R B \approx B$ y $R \otimes_R A \approx A$.

Ya que D es divisible, entonces es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo y así, el renglón de abajo es suprayectivo. Pero entonces, usando el hecho de que el diagrama es conmutativo y de que las flechas verticales son isomorfismos, se sigue que el renglón de arriba también es suprayectivo, que es lo que queríamos demostrar. □

Teorema 5.24. *Cada R-módulo M puede incluirse en un R-módulo inyectivo.*

Demostración. Si primero consideramos a M como un $\mathbb{Z}$-módulo, entonces sabemos que existe un grupo abeliano divisible D y un monomorfismo:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\ i\ } D$$

Si $m \in M$, definimos $f_m : R \to M$ tal que $f_m(r) = mr$, y es fácil ver que $\varphi : M \to Hom_{\mathbb{Z}}(R,D)$ dado por $\varphi(m) = i f_m$, es un R-monomorfismo, y la prueba concluye si usamos el teorema anterior. □

5.5. Extensiones Esenciales

Un concepto que está íntimamente ligado al de inyectividad es el de extensión esencial, el cual estudiamos brevemente en esta sección.

Definición 5.7. Sean M_R y $N \leq M$, decimos que M es una **extensión esencial** de N, si cada submódulo distinto de 0 de M, tiene intersección no cero con N, es decir, si para cualquier $0 \neq K \leq M$, se cumple que $K \cap N \neq 0$. También se dice en este caso, que N es un submódulo esencial de M.
Usamos la notación $N \subset_e M$ para denotar que M es una extensión esencial de N.

Ejemplo 5.7. El grupo aditivo $\mathbb{Q}$ es una extensión esencial de $\mathbb{Z}$, e igualmente cada subgrupo $\mathbb{Z} \leq G \leq \mathbb{Q}$ es una extensión esencial de $\mathbb{Z}$. Esto es claro, ya que dado cualquier racional $\frac{p}{q} \neq 0$, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $q(\frac{p}{q}) \in \mathbb{Z}$, lo que implica que $\mathbb{Z} \subset_e G$.

El ejemplo anterior claramente se puede generalizar como sigue:

Ejemplo 5.8. Si D es un dominio entero, y F es su campo de cocientes, entonces $D \subset_e F$.

Algunas de las propiedades de los submódulos esenciales se enuncian a continuación.

Proposición 5.25. *Son válidas:*

(1) Sea $N \leq M_R$, entonces $N \subset_e M$ si y solo si para todo $0 \neq x \in M$ existe $r \in R$ tal que $0 \neq xr \in N$.
(2) Sea $N \leq K \leq M$, entonces $N \subset_e M$ si y solo si $N \subset_e K$ y $K \subset_e M$.
(3) Si $N \subset_e K \leq M$, y $N' \subset_e K' \leq M$, entonces $N \cap N' \subset_e K \cap K'$.
(4) Si $f : M \to L$ y $K \subset_e L$, entonces $f^{-1}(K) \subset_e M$.
(5) Si $N \subset_e M$ y $\varphi : M \to M'$ es un R-homomorfismo tal que la restricción de φ a N es inyectiva, entonces φ es inyectiva.
(6) Si $N \leq M$ y $\{M_i | i \in I\}$ es una cadena de submódulos de M tal que $N \subset_e M_i$ para cada $i \in I$, entonces $N \subset_e \bigcup M_i$.

Demostración. En todos los casos, es simplemente aplicar la definición de extensión esencial:

(1) " $\Rightarrow$ " Si $N \subset_e M$ y $0 \neq x \in M$, entonces $xR \cap N \neq 0$, y de aquí es obvio que existe $r \in R$ tal que $0 \neq xr \in N$.

" $\Leftarrow$ " Sea $0 \neq L \leq M$ y sea $0 \neq x \in L$, entonces $0 \neq x \in M$ y por la hipótesis, existe $r \in R$ tal que $0 \neq xr \in N$. Por lo tanto, $0 \neq xr \in N \cap L$, lo que prueba que $N \subset_e M$.

(2) " $\Rightarrow$ " Si $N \subset_e M$ y $0 \neq x \in K$, entonces $x \in M$, de donde existe $r \in R$ tal que $0 \neq xr \in N$, lo que prueba que $N \subset_e K$; por otro lado, si $0 \neq x \in M$, entonces existe $r \in R$ tal que $0 \neq xr \in N$, de donde $xr \in K$, lo que demuestra que $K \subset_e M$.

" $\Leftarrow$ " Sea $0 \neq x \in M$, como $K \subset_e M$, entonces existe $r \in R$ tal que $0 \neq xr \in K$, y como $N \subset_e K$, entonces existe $r' \in R$ tal que $0 \neq (xr)r' \in N$, lo que implica que $N \subset_e M$.

(3) Si $0 \neq L \leq K \cap K'$, entonces como $N \subset_e K$, se sigue que $0 \neq L \cap N$, y como $N' \subset_e K'$, entonces $0 \neq (L \cap N) \cap N'$, y de aquí es claro que $N \cap N' \subset_e K \cap K'$.

(4) Por contrapositiva, suponemos que $f^{-1}(K)$ no es esencial en M, de donde existe $0 \neq N \leq M$ tal que $N \cap f^{-1}(K) = 0$, lo que implica que $N \cap kerf = 0$, y de aquí se sigue que $f|_N : N \to fN$ es un isomorfismo, por lo que $0 \neq fN \leq L$ y $fN \cap K = 0$, de donde K no es esencial en L.

(5) Como la restricción de φ a N es inyectiva, entonces $ker\varphi \cap N = 0$, y como $N \subset_e M$, entonces la igualdad anterior implica que $ker\varphi = 0$, por lo que φ es inyectiva.

(6) Como $\{M_i | i \in I\}$ es una cadena de submódulos de M, entonces $\bigcup M_i$ es un submódulo de M, y si $0 \neq x \in \bigcup M_i$, entonces $x \in M_i$ para alguna $i \in I$, y como $N \subset_e M_i$, entonces existe $r \in R$ tal que $0 \neq xr \in N$, lo que prueba que $N \subset_e \bigcup M_i$. $\square$

Se puede dar una caracterización de los módulos inyectivos en términos de extensiones esenciales.

Teorema 5.26. *Un módulo M_R es inyectivo si y solo si M no tiene extensiones esenciales propias.*

Demostración. " $\Rightarrow$ " Si M es inyectivo y $M \subset_e K$, entonces por el teorema 5.13 M es sumando directo de K, es decir, existe $L \leq K$ tal que $M \oplus L = K$. En particular, $M \cap L = 0$, y como $M \subset_e K$, entonces $L = 0$, de donde, $M = K$.

" $\Leftarrow$ " Supongamos que M no tiene extensiones esenciales propias, por el teorema 5.19, sabemos que existe E_R inyectivo tal que $M \leq E$. Por el Lema de Zorn, existe $N \leq E$ submódulo maximal con la propiedad de que $M \cap N = 0$. Esta última igualdad implica que el R-homomorfismo:

$$\varphi : \ M \hookrightarrow E \longrightarrow E/N$$

es inyectivo.

Por otro lado, E/N es una extensión esencial de M, ya que si $0 \neq S/N \leq E/N$, entonces $S \supsetneq N$ y por la maximalidad de N se sigue que $S \cap M \neq 0$, y de aquí se sigue que $S/N \cap M \neq 0$. Por lo tanto, se sigue de la hipótesis, que φ es isomorfismo, de donde $E = M + N$ y como $M \cap N = 0$, entonces M es sumando directo de E, y por el teorema 5.12, M es inyectivo. $\square$

5.6. La Cápsula Inyectiva

En esta sección probamos que para cada R-módulo M, existe un R-módulo inyectivo el cual es mínimo entre los inyectivos que contienen a M.

Teorema 5.27. *Sea $M_R \leq E_R$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) E es una extensión maximal de M, es decir, ninguna extensión esencial propia de E, es una extensión de M.

(ii) $M \subset_e E$ y E es inyectivo.

(iii) E es inyectivo y no existe E' inyectivo tal que $M \subset E' \subsetneqq E$.

Además, tal módulo E existe.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Si E no es inyectivo, entonces por el teorema 5.20, se sigue que existe $E' \supsetneqq E$ y $E \subset_e E'$, pero entonces por la proposición 5.4 (2) tenemos que $M \subset_e E'$, lo que contradice la hipótesis.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Si existe un tal módulo inyectivo E', entonces E' es un sumando directo de E, digamos que $E = E' \oplus E''$. Ya que $M \subset E'$, se sigue que $M \cap E'' = 0$ lo que contradice que $M \subset_e E$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Consideremos la familia de todas las extensiones esenciales de M que están contenidas en E, se sigue de la proposición 5.4 (6) y del Lema de Zorn, que existe una tal extensión maximal, digamos E', dentro de E. Afirmamos que E' es un aextensión maximal de M, ya que si suponemos que N es una extensión de M que contiene a E', entonces formamos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E' \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & N \\ & E & \end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión. Ya que E es inyectivo, podemos completar el diagrama como sigue:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E' \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & N \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Pero entonces $\varphi(x) = x$, $\forall x \in E'$, y en particular, $\forall x \in M$. Ahora bien, como $M \subset_e N$, por la proposición 5.4 (5), se sigue que φ es monomorfismo, por lo que $\varphi(N)$

es una extensión esencial de M contenida en E, y por la maximalidad de E' se sigue que $\varphi(N) = E'$, de donde $N = E'$.

En conclusión, E' es una extensión esencial maximal de M y por lo probado en (i) $\Rightarrow$ (ii), se sigue que E' no tiene extensiones esenciales propias . Por lo tanto, E' es inyectivo, y por la hipótesis se sigue que $E' = E$.

Finalmente para probar la existencia de E, incluimos a M en un módulo inyectivo y tomamos el submódulo E' como en la construcción de (iii) $\Rightarrow$ (i). □

Definición 5.8. Un módulo E que satisface cualquiera de las condiciones equivalentes del teorema 5.21, es llamado una **cápsula inyectiva** de M.

El teorema 5.21 prueba la existencia de las cápsulas inyectivas, y en el siguiente teorema probamos la unicidad (salvo isomorfismo).

Teorema 5.28. *Sea E una cápsula inyectiva de un módulo M_R, entonces:*
(i) Si E' es un R-módulo inyectivo que contiene a M, entonces hay un R-monomorfismo $\varphi : E \to E'$ tal que $\varphi(x) = x$, $\forall x \in M$.
(ii) Cualesquier dos cápsulas inyectivas de M, son R-isomorfas, con un isomorfismo que deja fijo a cada $x \in M$.

Demostración. (i) La inyectividad de E' nos permite completar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & E' & \end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión. Pero entonces por la proposición 5.8 (5), se sigue que φ es inyectiva.

(ii) Supongamos que E' es una cápsula inyectiva de M, si seguimos con la notación de (i), afirmamos que φ es suprayectiva, ya que en caso contrario, $\varphi(E)$ sería un sumando directo de E' el cual contiene a M, lo que contradice el hecho de que E' es una extensión esencial de M. Por lo tanto, φ es un R-isomorfismo. □

A la luz del teorema 5.22, podemos hablar de la cápsula inyectiva de un R-módulo M, y es denotada como $E(M)$.

Ejemplo 5.9. Si D es un dominio de ideales principales, entonces $E(D_D)$ es el campo de cocientes de D.

5.7. Módulos Semisimples

Finalizamos esta unidad con esta sección en la que hacemos un breve estudio de los módulos semisimples, cuyo concepto nos lleva de forma natural al de anillo semisimple, que en cierta forma, son los anillos con propiedades globales más completas.

Primero recordamos la siguiente definición.

Definición 5.9. Sea $0 \neq S_R$, decimos que S es un **R-módulo simple** si S no tiene submódulos no triviales, es decir, si S no tiene submódulos distintos de 0 y S.

En los ejercicios resueltos de la unidad 1, vimos varias propiedades de los módulos simples, por ejemplo (ver ejercicios 1.12.6 y 1.12.7), probamos que si $S \neq \{0\}$, entonces son equivalentes:

(i) S es un R-módulo simple.

(ii) $S = \langle x \rangle$ para todo $x \in S \setminus \{0\}$.

(iii) Si $0 \neq f \in Hom_R(S, N)$, entonces f es monomorfismo.

(iv) Si $0 \neq f \in Hom_R(N, S)$, entonces f es epimorfismo.

Veamos algunos ejemplos de módulos simples.

Ejemplo 5.10. Si $N \leq M_R$, entonces M/N es un R-módulo simple si y sólo si N es un submódulo maximal de M (ver ejercicio 1.12.8).

Ejemplo 5.11. Si $R = \mathbb{Z}$, un grupo abeliano S es simple si y sólo si S es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ con p un primo (ver ejercicio 1.12.11).

Ejemplo 5.12. Del Álgebra Lineal se sigue que si $R = \mathbb{K}$ es un campo y V es un $\mathbb{K}$-módulo (o sea un $\mathbb{K}$-espacio vectorial), entonces V es simple si y sólo si $dim_{\mathbb{K}} V = 1$.

Finalmente mencionamos que, de acuerdo al ejercicio 1.12.9, ya que el anillo R es finitamente generado (ya sea como R-módulo izquierdo o derecho), entonces R tiene ideales maximales (izquierdos y derechos) y en consecuencia, los correspondientes cocientes son R-módulos simples, es decir, siempre existen los R-módulos simples.

Por otro lado, de acuerdo al 'Algebra Lineal, sabemos que todo $\mathbb{K}$-espacio vectorial es una suma directa de copias del campo $\mathbb{K}$, y de acuerdo al ejemplo 5.7.3, tenemos entonces que todo $\mathbb{K}$-espacio vectorial es una suma directa de $\mathbb{K}$-submódulos simples. De esta forma, el siguiente concepto de alguna forma generaliza esta propiedad de los espacios vectoriales.

Definición 5.10. Sea M_R, decimos que M es un **R-módulo semisimple** si M es una suma de submódulos simples, es decir, si existe una familia $\{S_i | i \in I\}$ de submódulos simples de M tal que $M = \sum S_i$.

Ejemplo 5.13. El módulo $\{0\}$ se considera semisimple, ya que es la suma vacía de módulos simples.

Ejemplo 5.14. Todo R-módulo simple, es semisimple.

Ejemplo 5.15. Si $R = \mathbb{K}$ es un campo, entonces todo $\mathbb{K}$-módulo es semisimple.

La siguiente propiedad de los módulos semisimples es muy importante ya que tiene diversas consecuencias.

Proposición 5.29. *Sea M_R un módulo semisimple, tal que $M = \sum_{i \in I} S_i$ con S_i submódulo simple de M. Si $N \leq M$, entonces existe $J \subset I$ tal que:*

$$M = N \oplus (\bigoplus_{j \in J} S_j)$$

En particular, si tomamos $N = 0$, entonces:

$$M = \bigoplus_{j \in J} S_j$$

Es decir, un módulo es semisimple si y sólo si es una suma directa de submódulos simples.

Demostración. Aplicando el Lema de Zorn, podemos hallar un subconjunto maximal $J \subset I$ tal que la suma:

$$M' = N + (\bigoplus_{j \in J} S_j)$$

sea directa. Afirmamos entonces que $M' = M$ y para probarlo es suficiente demostrar que $M' \supset S_i$ para cada $i \in I$.

En efecto, si $S_{i_0} \not\subset M'$ para algún $i_0 \in I$, entonces ya que S_{i_0} es simple se sigue que $M' \cap S_{i_0} = 0$, y así la suma $M' + S_{i_0}$ es directa, lo que contradice la maximalidad de J. $\square$

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior tenemos:

Corolario 5.30. *Si M_R es semisimple, entonces cada submódulo de M es un sumando directo de M.*

Los R-módulos semisimples tienen muchas propiedades importantes que, en general, no tienen los R-módulos de otras clases, tal como mostramos en el siguiente resultado.

Proposición 5.31. *Sea M_R un módulo semisimple con descomposición semisimple $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$, y supongamos que*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de R-módulos. Entonces la sucesión se escinde y tanto K como N son semisimples. De hecho es posible hallar $J \subset I$ tal que $N \simeq \bigoplus_{j \in J} S_j$ y $K \simeq \bigoplus_{i \in I \setminus J} S_i$.

Demostración. Ya que Imf es un submódulo de M, se sigue por la proposición 5.5, que existe $J \subset I$ tal que $M = Imf \oplus \left(\bigoplus_{j \in J} S_j\right)$. De aquí resulta claro que la sucesión se escinde y además, $M \simeq K \oplus N \simeq Imf \oplus N$ lo que implica que $N \simeq M/Imf \simeq \bigoplus_{j \in J} S_j$.

Por otro lado, es claro que:

$$M = \left(\bigoplus_{i \in I \setminus J} S_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in J} S_j\right)$$

lo que implica que:

$$K \simeq Imf \simeq M/\bigoplus_{j \in J} S_j \simeq \bigoplus_{i \in I \setminus J} S_i$$

□

De esta forma, tenemos que todo submódulo y todo cociente de un módulo semisimple, es semisimple, y además, como mencionamos anteriormente, cada submódulo de un módulo semisimple, es un sumando directo de éste.

A continuación establecemos diversas caracterizaciones del concepto de módulo semisimple.

Teorema 5.32. *Para un R-módulo derecho M_R, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) M es semisimple.

(ii) M está generado por módulos simples, es decir, existe una familia de R-módulos simples (independiente) $\{S_i\}_{i\in I}$ y un epimorfismo

$$\bigoplus_{i\in I} S_i \to M \to 0$$

(iii) M es la suma de algún conjunto de submódulos simples.

(iv) M es la suma de sus submódulos simples.

(v) Cada submódulo de M es un sumando directo de éste.

(vi) Cada sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

se escinde.

Demostración. (i) ⇒ (ii) Supongamos que $M = \sum_{i\in I} S_i$ con $S_i \leq M$ submódulo simple para todo $i \in I$. Por lo tanto existe el epimorfismo canónico:

$$\bigoplus_{i\in I} \longrightarrow \sum_{i\in I} S_i = M \longrightarrow 0$$

y de aquí que M es generado por módulos simples.

(ii) ⇒ (iii) Si M está generado por módulos simples, entonces existe un epimorfismo $\bigoplus_{i\in I} S_i \longrightarrow M \longrightarrow 0$ con S_i módulo simple para todo $i \in I$. Pero entonces $M = \sum_{i\in I} f(S_i)$ y cada $f(S_i) = 0$ o $f(S_i) \simeq S_i$, con lo cual queda probado que M es una suma de algún conjunto de submódulos simples.

(iii) ⇒ (iv) Si existe $\{S_i\}_{i\in I}$ conjunto de submódulos simples de M tal que $M = \sum_{i\in I} S_i$ y si $\{S'_j\}_{j\in J}$ es la familia de todos los subm'odulos simples de M, entonces es claro que $\{S_i\}_{i\in I} \subset \{S'_j\}_{j\in J}$ lo que implica que $M = \sum_{j\in J} S'_j$ demostrando así (iv).

(iv) ⇒ (i) Es obvio por la definición de semisimple.

(i) ⇒ (v) Es el corolario 5.22.1.

(v) ⇔ (vi) Es obvio.

(v) ⇒ (i) Primero probamos que cada submódulo no nulo de M, tiene submódulos simples. En efecto, sea $x \in M \setminus \{0\}$, entonces Rx es un submódulo de M finitamente generado y se sigue, por el ejercicio 1.12.9, que Rx tiene submódulos maximales; sea $H \leq Rx$ un submódulo maximal. Ahora bien, por (v) se tiene que $M = H \oplus H'$ y por la Ley Modular (Teorema 1.6), tenemos que:

$$Rx = Rx \cap M = Rx \cap (H \oplus H') = H \oplus (Rx \cap H')$$

y de aquí que $Rx \cap H' \simeq Rx/H$ es submódulo simple de Rx.

Ahora sea N la suma de todos los submódulos simples de M. Por (v) tenemos que $M = N \oplus N'$; ya que $N \cap N' = \{0\}$, entonces N' no tiene submódulos simples, pero entonces esto implica que $N = \{0\}$ y de aquí que $M = N$ es semisimple. □

5.8. Ejercicios Resueltos

EJERCICIO 5.34. Una **resolución libre** de un módulo M es una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

en la cual cada F_n es un módulo libre.

Demostrar que cada módulo M tiene una resolución libre.

EJERCICIO 5.35. Sea P un R-módulo izquierdo proyectivo y sea I un ideal bilateral de R. Probar que P/IP es un R/I-módulo izquierdo proyectivo.

EJERCICIO 5.36. Sea R un anillo conmutativo y supongamos que P y Q son R-módulos proyectivos. Probar que $P \otimes_R Q$ es R-módulo proyectivo.

EJERCICIO 5.37. Supongamos que R y S son anillos con S un S-R-bimódulo. Si P es un R-módulo izquierdo proyectivo, probar que $S \otimes_R P$ es un S-módulo izquierdo proyectivo.

EJERCICIO 5.38. Demostrar el ejemplo 5.5.2.

EJERCICIO 5.39. Demostrar el ejemplo 5.6.1.

Gustavo Tapia Sánchez *(gtapia@uacj.mx)*
Luis Loeza Chin *(luis.loeza@uacj.mx)*
Francisco Ávila Álvarez *(favila@uacj.mx)*
Instituto de Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.
Ave. del Charro 450 Norte, Partido Romero, Ciudad Juárez, Chihuahua, México, 32310.

Appendix

A Soluciones de ejercicios y tests

A.0. Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.1. La prueba en ambos casos es trivial si consideramos los homomorfismos de anillos identidad:

$$1_L : L \to End^l(M)$$

y

$$1_R : R \to End^r(M)$$

De aquí vemos que si $f \in L$ y $m \in M$, entonces $f \cdot m = f(m)$, mientras que si $g \in R$, entonces $m \cdot g = (m)g$. ◀

Ejercicio 1.2. Sea ${}_sM$.
Por lo tanto $(M, +)$ es un grupo abeliano y $\exists \psi : S \to End^l(M)$ homomorfismos de anillos con 1.

$$\therefore \psi\phi : R \to End^l(M) \text{ es un homomorfismo de anillos con } 1.$$
$$\therefore M \text{ es un } R\text{-módulo izquierdo}$$

◀

Ejercicio 1.3(a) Recordemos que M es un R-módulo izquierdo a través de ϕ mediante la siguiente definición: $r \cdot m = \phi(r)(m)$

$$\therefore r \in An_R(M) \Leftrightarrow r \cdot m = 0, \forall m \in M$$
$$\Leftrightarrow \phi(r)(m) = 0, \forall m \in M$$
$$\Leftrightarrow \phi(r) = \tilde{0}$$
$$\Leftrightarrow r \in Ker\phi$$
$$\therefore An_R(M) = Ker\phi \text{ es un ideal de } R.$$

□

Ejercicio 1.3(b) Sea

$${}_RM \text{ es fiel} \Leftrightarrow \phi \text{ es inyectiva}$$
$$\Leftrightarrow Ker\phi = \{0\}$$
$$\Leftrightarrow Ker\phi = An_R(M) = \{0\}$$

□

Ejercicio 1.3(c) Por el Teorema del Factor para Anillos:
$\exists!$ g homo de anillos, $I \subset Kerf$, $(I$ ideal$)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \widetilde{R} \\ & R/I \arrow[ur, dotted, "\exists! g"'] & \end{tikzcd}$$

Además:

i) Si $I = Ker f \to g$ es inyectiva.

ii) Si F es sobre $\to g$ es sobre.

Entonces:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & End^l(M) \\ & R/An_R(M) \arrow[ur, dotted, "\exists! \psi"'] & \end{tikzcd}$$

donde ψ es homo de anillos con 1. Además ψ es inyectiva. □

Ejercicio 1.3(d) Del inciso anterior, ψ es inyectiva. Por lo tanto M es fiel como $R/An_R(M)$-módulo izquierdo. □

Ejercicio 1.4(a) Suponemos que f es mono. Entonces f es inyectiva.
Por demostrar: $An_R(N) \subset An_R(M)$.
Sea $r \in An_R(N)$ entonces $r \cdot n =, \forall n \in N$. Sea $m \in M$, por demostrar:

$$r \cdot m = 0.$$

Como $f(m) \in N$, entonces:

$$0 = r \cdot f(m) = f(r \cdot m) \text{ por ser } f \text{ un } R\text{-homomorfismo.}$$

$$\therefore r \cdot m \in ker f = \{0\} \quad \text{pues } f \text{ es inyectiva}$$

$$\therefore r \cdot m = 0$$

□

Ejercicio 1.4(b) Si f es epimorfismo entonces f es suprayectiva.
Sea $r \in An_R(M)$, por lo tanto $r \cdot m = 0, \forall m \in M$. Sea, además, $n \in N$. Por demostrar:

$$r \cdot n = 0, \forall n \in N$$

Como f es sobre, $\exists m \in M$ tal que $f(m) = n$

$$\therefore r \cdot n = r \cdot f(m) = f(r \cdot m) = f(0) \underbrace{=}_{f\ homo} 0$$

□

Ejercicio 1.5(a) Sea $x \in ker(f|_K)$, es decir, $x \in K$ y $f|_K(x) = 0$, pero esto último significa que $f(x) = 0$, por lo que $x \in K \cap kerf = \{0\}$ lo que prueba que $ker(f|_K) = \{0\}$. □

Ejercicio 1.5(b) Sea $n \in N$, ya que f es epimorfismo, entonces existe $m \in M$ tal que $f(m) = n$ y ya que $K + kerf = M$, entonces $m = k + x$ con $k \in K$ y $x \in kerf$, pero entonces:

$$n = f(m) = f(k+x) = f(k) + f(x) = f(k) + 0 = f(k) = f|_K(k)$$

lo que prueba que $f|_K$ es epimorfismo. □

Ejercicio 1.6. "⇒" Suponemos que M es simple.
Como $M \neq \{0\}$, entonces $a \in M$ para alguna $a \neq 0$. Consideramos el $\langle a \rangle \neq 0$. Al ser M simple, entonces:

$$\langle a \rangle = M$$

"⇐" Suponemos que N es submódulo de M.
Si $N = \{0\}$ termina la prueba. Suponemos que $N \neq \{0\}$.
Sea $a \neq 0$, $a \in N$ y consideramos $\langle a \rangle$, entonces:

$$\langle a \rangle \subset N \subset M = \langle a \rangle$$

$$\therefore N = M$$

$$\therefore M \text{ es simple.}$$

◀

Ejercicio 1.7. $(i) \Rightarrow (ii)$ Suponemos que M es simpe y $f : M \to N,\ f \neq 0$.
Por demostrar: f es monomorfismo.
Como $Kerf \leq M$ y M es simple, entonces:

$$Kerf = \{0\} \text{ o } Kerf = M$$

Si $Kerf = M$, entonces $\forall m \in M, f(m) = 0$

$$\therefore f = 0 \text{ lo cual es una contradicción.}$$

$$\therefore Kerf = \{0\}$$

$$\therefore f \text{ es monomorfismo.}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sea $L \leq M$. Por demostrar: $L = \{0\}$ o $L = M$.
Sea π la proyección canónica $\pi : M \to M/L$. Por hipótesis $\pi = 0$ o π es monomorfismo, es decir:

$$Ker\pi = M \quad \text{o} \quad Ker\pi = \{0\}$$

$$\therefore L = M \quad \text{o} \quad L = \{0\}$$

$(i) \Rightarrow (iii)$ Suponemos que M es simple y sea $f : N \to M$, $f \neq 0$. Por demostar: f es epimorfismo, es decir $Imf = M$. Sabemos que $Imf \leq M$ y M es simple.

$$\therefore Imf = \{0\} \quad \text{o} \quad Imf = M$$

Si $Imf = \{0\}$, entonces $\forall n \in N$, $f(n) = 0$. Por lo tanto $f = 0$ lo que es una contradicción.

$$\therefore Imf = M$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sea $L \leq M$. Por demostrar: M es simple, es decir $L = \{0\}$ o $L = M$. Sea $\imath : L \to M$ la inclusión.

$$\therefore \imath = 0 \quad \text{o} \quad \imath \text{ es epimorfismo}$$

Pero $Im\imath = L$

$$\therefore L = \{0\} \quad \text{o} \quad L = N$$

◀

Ejercicio 1.8. Sea $\pi : M \to M/N$ la proyección canónica. Sabemos que π es epimorfismo y $Ker\pi = N$. Por el Teorema de la Correspondencia hay una biyección:

$$A = \{L : N \leq L \leq M\} \longleftrightarrow \left\{\bar{L} : \bar{L} < M/N\right\} = B$$

$$\therefore |A| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad |B| = 2$$

Es decir:

$$N \text{ es maximal} \Leftrightarrow M/N \text{ es simple.}$$

◀

Ejercicio 1.9. Ya que M es finitamente generado entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in M$ tales que:

$$M = K + Rx_1 + \cdots + Rx_n$$

y por el Principio del Buen Orden podemos suponer que $(x_1, \ldots, x_n)$ es la sucesión de longitud mínima tal que se cumple la igualdad anterior. Por lo tanto, si definimos:

$$L = K + Rx_2 + \cdots + Rx_n$$

entonces $L \leq M$ con $L \neq M$. Ahora sea,

$$\mathcal{P} = \{N \mid N \leq M, N \neq M \text{ y } L \subset N\}$$

Ya que $L \in \mathcal{P}$, entonces $\mathcal{P} \neq \emptyset$ y además observamos que si $L \leq N \leq M$, entonces $N \in \mathcal{P}$ si y sólo si $x_1 \notin N$.

Ahora ordenamos parcialmente a $\mathcal{P}$ con la contención de conjuntos y tomamos una cadena no vacía $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$, y sea $N = \bigcup \mathcal{C}$; afirmamos que N es una cota superior en $\mathcal{P}$ de la cadena $\mathcal{C}$.

Primero vemos que $N \leq M$ para lo cual tomamos $x, y \in N$, de donde existen N_x y N_y en $\mathcal{C}$ tales que $x \in N_x$ y $y \in N_y$, pero como $\mathcal{C}$ es una cadena, podemos suponer que $N_x \subset N_y$ y de aquí que $x, y \in N_y$ de donde $x + y \in N_y \subset N$. Por otro lado si $x \in N$, entonces $x \in N_x$ y de aquí que $rx \in N_x \subset N$ para todo $r \in R$. Finalmente, como $\mathcal{C} \neq \emptyset$, entonces es claro que $N \neq \emptyset$. Con todo esto queda probado que N es un submódulo de M.

Debido a la definición de N es claro que $T \leq N$ para todo $T \in \mathcal{C}$ y además, como cada $T \in \mathcal{C}$ cumple que $T \in \mathcal{P}$, entonces también es claro que $L \leq N$.

Así, solamente nos resta probar que $N \neq M$, pero esto es claro ya que $L \leq N$ y $x_1 \notin N$.

Por lo tanto, por el Lema de Zorn se sigue que $\mathcal{P}$ tiene elementos maximales, así que elegimos uno de ellos y le llamamos N. Ya que $N \in \mathcal{P}$, entonces $K \leq L \leq N$ de donde $K \leq N$; por otro lado, si $N \leq N'$ con $N' \neq M$, entonces $x_1 \notin N'$ lo que implica que $N' \in \mathcal{P}$ y por la maximalidad de N se sigue que $N = N'$ con lo cual queda probado que N es un submódulo maximal de M y contiene a K.

Para la parte final vemos que como por hipótesis $M \neq \{0\}$, entonces podemos elegir $K = \{0\}$ y de aquí se sigue la conclusión. ◀

Ejercicio 1.10. "⇒" Suponemos ${}_RM$ es cíclico.

$$\therefore M = \langle x \rangle = R_x \ \ (x \in M)$$

Sea $f : R \to M$ tal que: $f(r) = r \cdot x$

i) f es R-homomorfismo:
$f(r_1 + r_2) = (r_1 + r_2)x = r_1x + r_2x = f(r_1) + f(r_2)$
$f(r_1 \cdot r_2) = (r_1 \cdot r_2)x = r_1(r_2x) = r_1 f(r_2)$

ii) f es suprayectiva:
Si $m \in M$ entonces:
$$m = r \cdot x = f(r)$$

Por el Primer Teorema de Isomorfismo:

$$R/\underbrace{Kerf}_{I} \approx M$$

"⇐" Suponemos que $M \approx R/I$ para $I \leq_R R$. Basta demostrar que R/I es cíclico.

$$R/I = \{r + I : r \in R\}$$

$$= \{r(1+I) : r \in R\}$$

$$= \langle 1+I \rangle \text{ es cíclico.}$$

◀

Ejercicio 1.11. "⇒" Si M es simple entonces, por el ejercicio 4, M es cíclico. Además, por el ejercicio 7:

$$M \approx \mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}$$

Como M es simple, en el ejercicio 6 vimos que $_n\mathbb{Z}$ debe ser maximal de $\mathbb{Z}$, donde $n = p$ es primo.

$$\therefore M \approx \mathbb{Z}/_p\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}_p$$

"⇐"

$$M \approx \mathbb{Z}_p \approx \mathbb{Z}/_p\mathbb{Z}$$

Por ser p primo, $p\mathbb{Z}$ es maximal en $\mathbb{Z}$ y por el ejercicio 6:

$$M \approx \mathbb{Z}/_p\mathbb{Z} \text{ es simple.}$$

◀

Ejercicio 2.12. Sea:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} R$$

donde f y g son homomorfismos de anillos con 1.
Supongamos que $fi = gi$. Como $fi : \mathbb{Z} \to R$, $gi : \mathbb{Z} \to R$ entonces $f(n) = g(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\therefore f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = f(m) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$$

Por otro lado,

$$1 = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = f(n) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{n}\right) = (f(n))^{-1}$$

Y análogamente

$$1 = g(1) = g(n) \cdot g\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore g(\frac{1}{n}) = (g(n))^{-1}$$

Como $f(n) = g(n)$ entonces:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = (f(n))^{-1} = (g(n))^{-1} = g\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = g(m) \cdot g\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{m}{n}\right)$$

$$\therefore f = g$$

$\therefore$ i es epimorfismo.

Ahora supongamos que $\alpha : A \to B$ es inyectiva y supongamos que existen $\beta : C \to A$, $\gamma : C \to A$ tal que $\alpha\beta = \alpha\gamma$

$$\therefore \forall x \in C,\ \alpha(\beta(x)) = \alpha(\gamma(x))$$

Como α es inyectiva; entonces:

$$\beta(x) = \gamma(x),\ \forall x \in C$$

$$\therefore \beta = \gamma$$

$\therefore$ α es monomorfismo.

Como i es inyectiva, entonces i es monomorfismo y por lo tanto i es bimorfismo. Como i no es sobre, entonces i no es isomorfismo. ◀

Ejercicio 2.13. Sean $g : K \to A$ la inclusión y $h : K \to A$ el homomorfismo nulo, tal que:

$$f(g(x)) = e = f(h(x)), \forall x$$

$$\therefore fg = fh$$

Por otro lado, como f no es inyectiva, entonces $K = ker f \neq \{e\}$.
Sea $x \in K, x \neq e$ y tenemos que: $g(x) = x$ y $h(x) = e$.

$$\therefore g(x) \neq h(x), \forall x \neq e$$

$$\therefore g \neq h$$

El argumento falla pues $f(1) = 1$ y por lo tanto $1 \notin K = Ker f$.
$\therefore$ K no es un objeto en la categoría de anillos con 1.
$\therefore$ g no es morfismo de la categoría. ◀

Ejercicio 2.14. Sea $f : A \to B$ monomorfismo. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ & L \arrow[u, "j"'] \arrow[ul, dotted, "\exists!0"] & \end{tikzcd}$$

Sabemos que $f0 = 0$ y suponemos que $\exists j : L \to A$ tal que $fj = 0$.

$$\therefore fj = 0 = f0$$

Como f es mono, entonces $j = 0$ y por lo tanto el triángulo conmuta.
Por lo tanto $0 : 0 \to A$ es núcleo de f.

Ahora, sea $f : A \to B$ epimorfismo. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & K & \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[u, "j"] \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[ul, dotted, "\exists! g=0"'] \end{tikzcd}$$

Suponemos que $\exists j : B \to K$ tal que $jf = 0$. Sabemos que $0f = 0$ y como 0 es objeto inicial, entonces $\exists!0 : 0 \to K$.

$$jf = 0f \;\Rightarrow\; j = 0$$

$$\therefore 0 : B \to 0 \text{ es conúcleo de } f.$$

◀

Ejercicio 2.15. $(i) \Rightarrow (ii)$ Supóngase que A es objeto cero. Como A es objeto inicial, entonces existe un único $A \to A$, de modo que debe ser 1_A.
Como ζ tiene objeto cero, entonces $\exists 0 : A \to A$.

$$\therefore 1_A = 0.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supóngase que 1_A es morfismo cero.
Por demostrar: A es objeto inicial y terminal:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] & A \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "0"'] & C \end{tikzcd}$$

Como 1_A es morfismo cero derecho, entonces:

$$\alpha \cdot 1_A = 0 \cdot 1_A.$$
$$\therefore \alpha = 0.$$

Por lo tanto, $\exists! A \to C$

$$\therefore \text{A es objeto inicial.}$$

Ahora, considerando el siguiente diagrama:

$$C \underset{\beta}{\overset{0}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{1_A} A$$

$$1_A \cdot 0 = 1_A \cdot \beta$$
$$\therefore 0 = \beta$$

Por dualidad A es objeto terminal,

$\therefore$ A es objeto terminal.

$\therefore$ A es objeto cero.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Por ser 0 objeto cero de ζ entonces $\exists! A \to 0$.
Sean

$$B \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{0} 0$$

con $0 \cdot \alpha = 0 \cdot \beta$. Por demostrar: $\alpha = \beta$.
Sea

$$B \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{1_A} A$$

Como 1_A es morfismo cero izquierdo, entonces:

$$1_A \cdot \alpha = 1_A \cdot \beta$$
$$\therefore \alpha = \beta$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Supóngase que

$$\exists\ A \xrightarrow{0} 0\ \ - monomorfismo.$$

Sean

$$A \underset{0}{\overset{1_A}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{0} 0$$

Tenemos que:

$$0 \cdot 1_A = 0 \cdot 0$$

Como 0 es monomorfismo, entonces $1_A = 0$ es morfismo cero.

Además, por dualidad, $(ii) \Leftrightarrow (iv)$

◀

Ejercicio 2.16. Tenemos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & A_2' \arrow[d, "\epsilon"] \arrow[dr, "\alpha"] & & \\
0 \arrow[r] & A_1' \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "\beta"'] & A \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\gamma"] & A_1'' \arrow[r] & 0 \\
 & & A_2'' \arrow[ur, "g"'] \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Sea $x \in A_2'$, entonces $\alpha(x) \in A''$ y como θ es epimorfismo, entonces $\exists a \in A$ tal que:

$$\theta(a) = \alpha(x) = \theta\epsilon(x)$$

$$\therefore a - \epsilon(x) \in Ker\theta = Im\lambda$$

$\therefore \exists\ z \in A_1'$ tal que:

$$a - \epsilon(x) = \lambda(z)$$

$$\therefore \gamma(a) - \gamma(\epsilon(x)) = \gamma(\lambda(z))$$

Donde $\gamma(\epsilon(x)) = 0$ por ser exacta.

$$\therefore \gamma(a) = \beta(z)$$

Aplicándole g:

$$\theta(a) = g(\gamma(a)) = g(\beta(z)) = \theta\lambda(z) = 0$$

$$\therefore \alpha(x) = 0,\ \forall x \in A_2'$$

$$\therefore \alpha = 0$$

Análogamente β.
Falta demostrar que f es isomorfismo.
Sea $z \in A_1'$ tal que $f(z) = 0$. Por demostrar $z = 0$.

$$\therefore \lambda(z) = \epsilon(f(z)) = \epsilon(0) = 0$$

Como λ es mono (por ser exacta), entonces $z = 0$.

$$\therefore Kerf = \{0\}$$

$\therefore f$ es inyectiva.
Para que f sea isomorfismo, falta probar que f es sobre. Sea $x \in A_2'$:

$$\therefore 0 = \alpha(x) = \theta(\epsilon(x))$$

$$\therefore \epsilon(x) \in Ker\theta = Im\lambda$$

Por lo tanto $\exists\ z \in A_1'$ tal que $\epsilon(x) = \lambda(z) = \epsilon(f(z))$.

$$\therefore x - f(z) \in Ker\epsilon$$

Pero ϵ es inyectiva, es decir $Ker\epsilon = \{0\}$

$$\therefore x = f(z)$$

$\therefore$ f es sobre.
$\therefore$ f es isomorfismo.
Por dualidad g es isomorfismo. ◀

Ejercicio 2.17. " $\Rightarrow$ " Suponemos que es exacta.

$$\therefore Imf = Kerg$$

$$\therefore \forall x \in L, \quad f(x) \in Imf = Kerg$$

Es decir, $g(f(x)) = 0, \forall x$ y por lo tanto $gf = 0$.
Por el inciso uno del Teorema del Factor, ϕ es monomorfismo.
" $\Leftarrow$ " Suponemos que $gf = 0$, entonces $\forall x \in L, \quad g(f(x)) = 0$.
Lo que implica que:

$$f(x) \in Kerg, \forall x \in L$$

$$\therefore Imf \subset Kerg$$

Ahora tomemos un elemento del núcleo y veamos que sí está en la imagen.
Por hipótesis, ϕ es monomorfismo. Pero $\phi(m + Imf) = g(m)$.

$$\begin{aligned} \therefore m \in Kerg \quad &\Rightarrow \quad g(m) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \phi(m + Imf) = 0 \\ &\Rightarrow \quad m + Imf = \bar{0} = Imf \\ &\Rightarrow \quad m \in Imf \end{aligned}$$

$$\therefore Kerg \subset Imf$$

$$\therefore Imf = Kerg$$

$\therefore$ La sucesión es exacta. ◀

Ejercicio 3.18(a) Para cada $j \in I$ definimos $f_j : A_j \to M$ como $f_j = fi_j$. Por la propiedad universal de la suma directa sabemos que existe un único R-homomorfismo $\psi : \bigoplus A_i \to M$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[rr, "i_j"] \arrow[dr, "f_j"'] & & A \arrow[dl, dashed, "\exists!\psi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Pero claramente $\psi = f$ y $\psi = 0$ hacen que el diagrama conmute, así que por la unicidad de ψ podemos concluir que $f = 0$. $\square$

Ejercicio 3.18(b) Si $fi_j = gi_j, \forall j \in I$, entonces $fi_j - gi_j = 0$ o lo que es lo mismo $(f - g)i_j = 0, \forall j \in I$. Si usamos ahora el inciso (i) ya probado, podemos concluir que $f - g = 0$, de donde $f = g$. $\square$

Ejercicio 3.19(a) Para cada $j \in I$ definimos $f_j : M \to A_j$ como $f_j = p_j f$. Por la propiedad universal del producto directo sabemos que existe un único R-homomorfismo $\psi : M \to \prod A_i$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A_j & & \prod A_i \arrow[ll, "p_j"'] \\ & M \arrow[ul, "f_j"] \arrow[ur, dashed, "\exists!\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Pero claramente $\psi = f$ y $\psi = 0$ hacen que el diagrama conmute, así que por la unicidad de ψ podemos concluir que $f = 0$. $\square$

Ejercicio 3.19(b) Si $p_j f = p_j g, \forall j \in I$, entonces $p_j f - p_j g = 0$ o lo que es lo mismo $p_j(f - g) = 0, \forall j \in I$. Si usamos ahora el inciso (i) ya probado, podemos concluir que $f - g = 0$, de donde $f = g$. $\square$

Ejercicio 3.20(a) (i) Por la propiedad universal del producto directo, sabemos que existe un único R-homomorfismo $f : M \to \prod M_\alpha$ tal que $p_\alpha f = f_\alpha, \forall \alpha \in I$, donde $p_\alpha : \prod M_\alpha \to M_\alpha$ son las proyecciones canóninas. De esta igualdad se sigue que $\forall x \in M$ se cumple que $f(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in I}$ y de aquí que $f(x) = (0)$ si y sólo si $f_\alpha(x) = 0, \forall \alpha \in I$ lo que demuestra que $\ker f = \bigcap \ker f_\alpha$. $\square$

Ejercicio 3.20(b) Ya que $M_\alpha \leq M$, entonces para cada $\alpha \in I$ podemos definir las proyecciones $\pi_\alpha : M \to M/M_\alpha$ donde sabemos que $\ker \pi_\alpha = M_\alpha$. Si ahora usamos el resultado del inciso (i) de este ejercicio, tenemos que existe un R-homomorfismo $f : M \to \prod M/M_\alpha$ tal que $\ker f = \bigcap \ker \pi_\alpha = \bigcap M_\alpha = \{0\}$ lo que implica que f es monomorfismo, es decir, $M \hookrightarrow \prod M/M_\alpha$. $\square$

Ejercicio 3.21(a) (i) Por la propiedad universal de la suma directa, sabemos que existe un único R-homomorfismo $f : \bigoplus M_\alpha \to M$ tal que $fi_\alpha = f_\alpha, \forall \alpha \in I$, donde $i_\alpha : M_\alpha \to \bigoplus M_\alpha$ son las inclusiones canónicas. De aquí se sigue que un elemento típico de Imf es de la forma $x = f\left((m_\alpha)\right)$ con $(m_\alpha) \in \bigoplus M_\alpha$, y de aquí que $x = f\left(i_{\alpha_1}(m_{\alpha_1}) + \cdots + i_{\alpha_k}(m_{\alpha_k})\right) = f_{\alpha_1}(m_{\alpha_1}) + \cdots + f_{\alpha_k}(m_{\alpha_k})$ lo que demuestra que $Imf = \sum Imf_\alpha$. □

Ejercicio 3.21(b) (ii) Ya que $M_\alpha \leq M, \forall \alpha \in I$, podemos definir las inclusiones naturales $j_\alpha : M_\alpha \to M$ donde sabemos que $Imj_\alpha = M_\alpha$. Si ahora usamos el inciso (i) de este ejercicio sabemos que existe un R-homomorfismo $f : \bigoplus M_\alpha \to M$ tal que $Imf = \sum Imj_\alpha = \sum M_\alpha$ y de aquí es claro que podemos correstringir f a un R-epimorfismo $\overline{f} : \bigoplus M_\alpha \to \sum M_\alpha$. □

Ejercicio 3.22. Ya que el límite directo es un cociente de una suma directa, entonces, por dualización, el límite inverso deberá ser un submódulo de un producto directo. En efecto, sea

$$A = \{(a_i) \in \prod F_i \mid a_i = \psi_i^j(a_j), \text{ si } i \leq j\}$$

y afirmamos que A es el límite inverso del sistema inverso (F_i, ψ_i^j).

Es fácil verificar que A es un R-submódulo de $\prod F_i$. Ahora definimos los R-homomorfismos $\alpha_i : A \to F_i$ como la restricción $\alpha_i = p_i|_A$ de la proyección canónica. Tenemos entonces que para todo $(a_i) \in \prod F_i$ e $i \leq j$ se cumple que:

$$\psi_i^j \alpha_j\left((a_i)\right) = \psi_i^j(a_j) = a_i = \alpha_i\left((a_i)\right)$$

lo que implica que $\psi_i^j \alpha_j = \alpha_i$ si $i \leq j$.

Ahora supongamos que existe ${}_RX$ y R-homomorfismos $f_i : X \to F_i$ tales que $\psi_i^j f_j = f_i$ siempre que $i \leq j$. Por la propiedad universal del producto directo sabemos que existe un único R-homomorfismo $\phi : X \to \prod F_i$ tal que $p_i\phi = f_i, \forall i$ y afirmamos que $Im\phi \subset A$. En efecto, para cada $x \in X$ si $\phi(x) = (a_i)$, y tomamos $i \leq j$, entonces:

$$\psi_i^j(a_j) = \psi_i^j p_j\left((a_i)\right) = \psi_i^j p_j \phi(x) = \psi_i^j f_j(x) = f_i(x) = p_i\phi(x) = a_i$$

lo que implica que $\phi(x) \in A$ para todo $x \in X$.

Por lo tanto, podemos correstringir $\phi : X \to A$ y entonces tenemos que para cada $x \in X$ se cumple que:

$$\alpha_i\phi(x) = p_i\phi(x) = f_i(x)$$

lo que significa que $\alpha_i\phi = f_i$ tal como queríamos probar.

Finalmente, suponiendo que exista otro R-homomorfismo $\phi' : X \to A$ tal que $\alpha_i\phi' = f_i, \forall i$, entonces sea $\iota : A \to \prod F_i$ y tenemos que para cada $x \in X$ se cumple que:

$$p_i\iota\phi'(x) = \alpha_i\phi'(x) = f_i(x)$$

lo que implica que $p_i \iota \phi' = f_i, \forall i$ y por la unicidad de ϕ se sigue que $\iota\phi' = \phi$ pero esto significa que para cada $x \in X, \phi'(x) = \phi(x)$, es decir $\phi' = \phi$ probando así la unicidad de ϕ.

Por todo lo anterior hemos probado que (A, α_i) es el límite inverso de (F_i, ψ_i^j). ◄

Ejercicio 3.23. En primer lugar probamos que D es un R-módulo izquierdo:

(i) Si $(b_1, c_1), (b_2, c_2) \in D$, entonces $f(b_1) = g(c_1)$ y $f(b_2) = g(c_2)$ lo que implica que:
$$f(b_1 + b_2) = f(b_1) + f(b_2) = g(c_1) + g(c_2) = g(c_1 + c_2)$$
y de aquí que $(b_1, c_1) + (b_2, c_2) = (b_1 + b_2, c_1 + c_2) \in D$.

(ii) Si $(b, c) \in D$ y $r \in R$, entonces $f(b) = g(c)$ lo que implica que:
$$f(rb) = rf(b) = rg(c) = g(rc)$$
y de aquí que $r(b, c) = (rb, rc) \in D$.

Ahora probemos que el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

En efecto, tenemos que:
$$(g\alpha)(b, c) = g(\alpha(b, c)) = g(c) = f(b) = f(\beta(b, c)) = (f\beta)(b, c)$$
y de aquí que $g\alpha = f\beta$.

Suponiendo ahora que existen R-homomorfismos $\alpha' : X \to C$ y $\beta' : X \to B$ tales que el cuadrado externo conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "\alpha'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta'"'] & & \\
& D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "g"] \\
& B \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

entonces por la propiedad universal del producto directo, existe un único R-homomorfismo $\theta : X \to B \oplus C$ tal que si $\theta(x) = (b, c)$, entonces:
$$b = p_1\theta(x) = \beta'(x)$$

$$c = p_2\theta(x) = \alpha'(x)$$

pero entonces tenemos que:

$$f(b) = f(\beta'(x)) = g(\alpha'(x)) = g(c)$$

lo que demuestra que $\theta(x) = (b, c) \in D$, es decir, podemos correstringir el homomorfismo $\theta : X \to D$.

Además las siguientes igualdades:

$$(\alpha\theta)(x) = \alpha(\theta(x)) = c = \alpha'(x)$$

$$(\beta\theta)(x) = \beta(\theta(x)) = b = \beta'(x)$$

demuestran que $\alpha\theta = \alpha'$ y $\beta\theta = \beta'$.

De esta forma hemos probado que existe un R-homomorfismo $\theta : X \to D$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[drr, bend left, "\alpha'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta'"'] & & \\
& D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "g"] \\
& B \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

Finalmente, supongamos que existe otro R-homomorfismo $\theta' : X \to D$ tal que $\alpha\theta' = \alpha'$ y $\beta\theta' = \beta'$, y sea $\iota : D \to B \oplus C$ la inclusión natural. Tenemos entonces que si $\theta'(x) = (b, c)$, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

$$[p_1(\iota\theta')](x) = p_1(\theta'(x)) = b = \beta\theta'(x) = \beta'(x)$$

$$[p_2(\iota\theta')](x) = p_2(\theta'(x)) = c = \alpha\theta'(x) = \alpha'(x)$$

Así que por la unicidad de $\theta : X \to B \oplus C$, se sigue que $\iota\theta' = \theta$, lo que implica que $\theta'(x) = \theta(x), \forall x \in X$ o sea que $\theta' = \theta$.

Todo lo anterior demuestra que $\{D, \alpha, \beta\}$ es el pullback de $\{f, g\}$. ◀

Ejercicio 3.24. Primero suponemos que g es monomorfismo y probamos que β es monomorfismo: sea $(b, c) \in D$ tal que $\beta(b, c) = 0$, es decir, $b = 0$. Ahora bien, tenemos que:

$$0 = f(0) = f(\beta(b, c)) = f(b)$$

y como $(b, c) \in D$, entonces $f(b) = g(c)$, es decir, $g(c) = 0$ y ya que g es monomorfismo, entonces se sigue que $c = 0$. En conclusión, $(b, c) = (0, 0)$ lo que demuestra que β es monomorfismo.

Ahora suponemos que g es epimorfismo y probamos que β es epimorfismo: sea $b \in B$ de donde $f(b) \in A$ y como g es epimorfismo, entonces existe $c \in C$ tal que $f(b) = g(c)$, pero esto implica que $(b, c) \in D$ y como $\beta(b, c) = b$ entonces hemos probado que β es epimorfismo. ◀

Ejercicio 3.25. Sea $i : \ker f \to B$ la inclusión natural, y sabemos que $fi = 0$ lo que implica que el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & 0 \arrow[d, "0"] \\
B \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

Ahora suponemos que existen R-homomorfismos $\alpha : X \to 0$ (por lo tanto, $\alpha = 0$) y $\beta : X \to B$ tal que $f\beta = 0\alpha = 0$; por lo tanto, por la propiedad universal del núcleo, sabemos que existe un único R-homomorfismo $\phi : X \to \ker f$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, dashed, "\exists!\phi"'] \arrow[d, "\beta"] & \\
\ker f \arrow[r, "i"'] & B \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

Y ya que claramente $0\phi = \alpha$, entonces hemos probado que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\exists!\phi"] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "\beta"'] & & \\
 & \ker f \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & 0 \arrow[d, "0"] \\
 & B \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

◀

Ejercicio 3.26. Si completamos el diagrama,

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "\pi"] \arrow[ddr, bend left, "\pi'"] & \\
0 \arrow[r, "0"] & X \arrow[dr, dotted, "\phi"] & \\
 & & X'
\end{tikzcd}
$$

Donde (X, π) es el coker$f$. Entonces $\pi f = 0$ y para toda $\pi' : B \to X'$, si $\pi' f = 0$, entonces existe un único $\phi : X \to X'$ tal que $\phi\pi = \pi'$.

Es obvio que $0g = \pi f = 0$, supongamos ahora que existen

$$i : B \to X'$$

$$j : 0 \to X'$$

Tendríamos el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "\pi"] \arrow[ddr, bend left, "i"] & \\
0 \arrow[r, "0"] \arrow[drr, bend right, "j"'] & X \arrow[dr, dotted, "\phi"] & \\
 & & X'
\end{tikzcd}
$$

donde podemos ver que, $if = jg$, entonces $if = 0$, por lo tanto, por la propiedad universal del coker, existe un único $\phi : X \to X'$ tal que $\phi\pi = i$, es decir, $(X, \pi, 0)$ es el pushout del sistema directo. ◀

Ejercicio 4.27(a) (i) Tenemos que sf es un R-homomorfismo de R-módulos izquierdos, ya que para todo $r \in R$ se cumple que:

$$(sf)(ra) = f((ra)s) = f(r(as)) = rf(as) = r(sf)(a)$$

Ahora probamos que $s_1(s_2 f) = (s_1 s_2)f$; en efecto tenemos que para todo $a \in A$ se cumple que:

$$(s_1(s_2 f))(a) = (s_2 f)(as_1) = f((as_1)s_2) = f(a(s_1 s_2)) = ((s_1 s_2)f)(a)$$

A continuación probamos que $(s_1+s_2)f = s_1f + s_2f$; en efecto, para cada $a \in A$ tenemos que:

$$((s_1+s_2)f)(a) = f(a(s_1+s_2)) = f(as_1+as_2) = f(as_1)+f(as_2)$$
$$= (s_1f)(a)+(s_2f)(a) = (s_1f+s_2f)(a)$$

Ahora vemos que $s(f_1+f_2) = sf_1+sf_2$; en efecto tenemos que para todo $a \in A$ se cumple que:

$$(s(f_1+f_2))(a) = (f_1+f_2)(as) = f_1(as)+f_2(as) = (sf_1)(a)+(sf_2)(a)$$
$$= (sf_1+sf_2)(a)$$

Finalmente probamos que para $1 \in S$ se tiene que $(1f) = f$; en efecto, para cada $a \in A$ se cumple que:

$$(1f)(a) = f(a\cdot 1) = f(a)$$

Todo lo anterior prueba que $Hom_R(A,B)$ es un S-módulo izquierdo. $\square$

Ejercicio 4.27(b) (ii) Tenemos que fr es un S-homomorfismo de S-módulos derechos, ya que para todo $s \in S$ se cumple que:

$$(fr)(as) = f(r(as)) = f((ra)s) = f(ra)s = ((fr)(a))s$$

Ahora probamos que $(fr_1)r_2 = f(r_1r_2)$; en efecto, tenemos que para todo $a \in A$ se cumple que:

$$((fr_1)r_2)(a) = (fr_1)(r_2a) = f(r_1(r_2a)) = f((r_1r_2)a) = (f(r_1r_2))(a)$$

A continuación probamos que $f(r_1+r_2) = fr_1+fr_2$; en efecto tenemos que para todo $a \in A$ se cumple que:

$$(f(r_1+r_2))(a) = f((r_1+r_2)a) = f(r_1a+r_2a) = f(r_1a)+f(r_2a)$$
$$= (fr_1)(a)+(fr_2)(a) = (fr_1+fr_2)(a)$$

Ahora vemos que $(f_1+f_2)r = f_1r+f_2r$; en efecto, tenemos que para todo $a \in A$ se cumple que:

$$((f_1+f_2)r)(a) = (f_1+f_2)(ra) = f_1(ra)+f_2(ra)$$
$$= (f_1r)(a)+(f_2r)(a) = (f_1r+f_2r)(a)$$

Finalmente probamos que para $1 \in R$ se cumple que $f\cdot 1 = f$; en efecto, tenemos que para cada $a \in A$ se cumple que:

$$(f\cdot 1)(a) = f(1\cdot a) = f(a)$$

Todo lo anterior demuestra que $Hom_S(A, B)$ es un R-módulo derecho. □

Ejercicio 4.27(c) (iii) Tenemos que sf es un R-homomorfismo de R-módulos derechos, ya que para todo $r \in R$ se cumple que:

$$(sf)(ar) = s(f(ar)) = s(f(a)r) = (sf(a))r = ((sf)(a))r$$

Ahora probamos que $s_1(s_2f) = (s_1s_2)f$; en efecto tenemos que para todo $a \in A$ se cumple que:

$$(s_1(s_2f))(a) = s_1((s_2f)(a)) = s_1(s_2(f(a))) = (s_1s_2)(f(a)) = ((s_1s_2)f)(a)$$

A continuación probamos que $(s_1 + s_2)f = s_1f + s_2f$; en efecto, para cada $a \in A$ tenemos que:

$$((s_1 + s_2)f)(a) = (s_1 + s_2)(f(a)) = s_1(f(a)) + s_2(f(a))$$

$$= (s_1f)(a) + (s_2f)(a) = (s_1f + s_2f)(a)$$

Ahora vemos que $s(f_1 + f_2) = sf_1 + sf_2$; en efecto tenemos que para todo $a \in A$ se cumple que:

$$(s(f_1 + f_2))(a) = s((f_1 + f_2)(a)) = s(f_1(a) + f_2(a)) = s(f_1(a)) + s(f_2(a))$$

$$= (sf_1)(a) + (sf_2)(a) = (sf_1 + sf_2)(a)$$

Finalmente probamos que para $1 \in S$ se tiene que $(1f) = f$; en efecto, para cada $a \in A$ se cumple que:

$$(1f)(a) = 1(f(a)) = f(a)$$

Todo lo anterior prueba que $Hom_R(A, B)$ es un S-módulo izquierdo. □

Ejercicio 4.27(d) (iv) Tenemos que fr es un S-homomorfismo de S-módulos izquierdos, ya que para todo $s \in S$ se cumple que:

$$(fr)(sa) = (f(sa))r = (sf(a))r = s(f(a)r) = s((fr)(a))$$

Ahora probamos que $(fr_1)r_2 = f(r_1r_2)$; en efecto, tenemos que para todo $a \in A$ se cumple que:

$$((fr_1)r_2)(a) = ((f(r_1)(a))r_2 = (f(a)r_1)r_2 = (f(a))(r_1r_2) = (f(r_1r_2))(a)$$

A continuación probamos que $f(r_1 + r_2) = fr_1 + fr_2$; en efecto tenemos que para todo $a \in A$ se cumple que:

$$(f(r_1 + r_2))(a) = f(a)(r_1 + r_2) = f(a)r_1 + f(a)r_2$$

$$= (fr_1)(a) + (fr_2)(a) = (fr_1 + fr_2)(a)$$

Ahora vemos que $(f_1 + f_2)r = f_1 r + f_2 r$; en efecto, tenemos que para todo $a \in A$ se cumple que:

$$\begin{aligned}((f_1 + f_2)r)(a) &= (f_1 + f_2)(a)r = (f_1(a) + f_2(a))r \\ &= f_1(a)r + f_2(a)r = (f_1 r)(a) + (f_2 r)(a) = (f_1 r + f_2 r)(a)\end{aligned}$$

Finalmente probamos que para $1 \in R$ se cumple que $f \cdot 1 = f$; en efecto, tenemos que para cada $a \in A$ se cumple que:

$$(f \cdot 1)(a) = f(a) \cdot 1 = f(a)$$

Todo lo anterior demuestra que $Hom_S(A, B)$ es un R-módulo derecho. □

Ejercicio 4.28. En vista de que R es un R-R-bimódulo, sabemos por el ejercicio anterior que $Hom_R(R, B)$ es un R-módulo izquierdo bajo la operación $(rf)(r') = f(r'r)$.

Sea $\phi : Hom_R(R, B) \to B$ dado por $\phi(f) = f(1)$, y veamos primero que ϕ es un R-homomorfismo de R-módulos izquierdos. En efecto, por un lado tenemos que:

$$\phi(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(1) = f_1(1) + f_2(1) = \phi(f_1) + \phi(f_2)$$

y por otro lado también se cumple que:

$$\phi(rf) = (rf)(1) = f(1 \cdot r) = f(r) = rf(1) = r\phi(f)$$

Ahora probamos que ϕ es inyectiva: en efecto, si $\phi(f) = 0$, entonces $f(1) = 0$ lo que implica que $f(r) = rf(1) = r \cdot 0 = 0, \forall r \in R$ de donde $f = 0$.

Finalmente vemos que ϕ es suprayectiva: en efecto, dado $b \in B$ definimos $f : R \to B$ tal que $f(r) = rb$ y lo primero que vemos es que $f \in Hom_R(R, B)$:

(i) $f(r_1 + r_2) = (r_1 + r_2)b = r_1 b + r_2 b = f(r_1) + f(r_2)$.

(ii) $f(rr') = (rr')b = r(r'b) = rf(r')$.

Pero entonces tenemos que $\phi(f) = f(1) = 1 \cdot b = b$.

Todo lo anterior demuestra que ϕ es un R-isomorfismo de R-módulos izquierdos. El caso para cuando B es un R-módulo derecho es similar. ◀

Ejercicio 4.29. Basta probar que $x \otimes y = 0, \forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
En efecto:

$$\begin{aligned}\frac{m}{n} \otimes \left(\frac{p}{q} + \mathbb{Z}\right) &= \frac{qm}{qn} \otimes \left(\frac{p}{q} + \mathbb{Z}\right) \\ &= \frac{m}{qn} \otimes \left(\cancel{q}\left(\frac{p}{\cancel{q}}\right) + \mathbb{Z}\right) \\ &= \frac{m}{qn} \otimes (p + \mathbb{Z}) \\ &= \frac{m}{qn} \otimes \mathbb{Z} \\ &= \frac{m}{qn} \otimes \bar{0} \\ &= 0\end{aligned}$$

◀

Ejercicio 4.30. Ya que M es un grupo abeliano de torsión, sabemos que si $x \in M$, entonces existe $n > 0$ tal que $nx = 0$: por lo tanto tenemos que para cada $y \in \mathbb{Q}$ se cumple que:

$$x \otimes y = x \otimes \frac{ny}{n} = nx \otimes \frac{y}{n} = 0 \otimes \frac{y}{n} = 0$$

lo que demuestra que $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$. ◀

Ejercicio 4.31. Consideremos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

Si aplicamos el funtor $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \_$ tenemos que la sucesión :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

no puede ser exacta, ya que por un lado sabemos que $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$ y por otro lado, por el ejercicio anterior se tiene que $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

Por lo tanto hemos probado que el funtor $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \_$ no es exacto izquierdo y por lo tanto, no es exacto. ◀

Ejercicio 4.32. Primero observamos que ya que R es anillo conmutativo, entonces A y B son R-R-bimódulos y por lo tanto $A \otimes_R B$ y $B \otimes_R A$ son R-módulos bajo la operación $r(a \otimes b) = (ra) \otimes b = a \otimes (rb)$ y lo mismo con $B \otimes_R A$.

Ahora definimos la función $f : A \times B \to B \otimes_R A$ tal que $f(a, b) = b \otimes a$. Entonces f es R-biaditiva ya que:

(i) $f(a + b, c) = c \otimes (a + b) = (c \otimes a) + (c \otimes b) = f(a, c) + f(b, c)$.

(ii) $f(a, b + c) = (b + c) \otimes a = (b \otimes a) + (c \otimes a) = f(a, b) + f(a, c)$.

(iii) $f(ra, b) = b \otimes (ra) = (rb) \otimes a = f(a, rb)$.

Por lo tanto, por la propiedad universal del producto tensorial, sabemos que existe un homomorfismo de grupos abelianos $\tau : A \otimes_R B \to B \otimes_R A$ tal que $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$.

Pero de hecho τ es un R-homomorfismo ya que para todo $r \in R$ se cumple que:

$$\tau(r(a \otimes b)) = \tau((ra) \otimes b) = b \otimes (ra) = r(b \otimes a) = r\tau(a \otimes b)$$

Análogamente existe un R-homomorfismo $\sigma : B \otimes_R A \to A \otimes_R B$ tal que $\sigma(b \otimes a) = a \otimes b$ y claramente τ y σ son R-homomorfismos inversos uno del otro, por lo que son R-isomorfismos, lo que demuestra que $A \otimes_R B \simeq B \otimes_R A$ como R-módulos. ◀

Ejercicio 4.33(a) (i) Sea $f : R/I \to M/IM$ tal que $f(r+I, m) = rm + IM$ y lo primero que vemos es que f está bien definida, ya que si $r + I = I$, entonces $r \in I$ y de aquí que $rm \in IM$, de donde $rm + IM = IM$.

Ahora probamos que f es una función R-biaditiva:

(i) $f(r+I, m_1+m_2) = r(m_1+m_2) + IM = (rm_1 + IM) + (rm_2 + IM)$
$= f(r+I, m_1) + f(r+I, m_2)$.

(ii) $f((r_1+I)+(r_2+I), m) = f(r_1+r_2+I, m) = (r_1+r_2)m + IM$
$= (r_1 m + IM) + (r_2 m + IM)$
$= f(r_1+I, m) + f(r_2+I, m)$.

(iii) $f((r+I)r', m) = f(rr'+I, m) = (rr')m + IM = r(r'm) + IM$
$= f(r+I, r'm)$.

Por lo tanto, por la propiedad universal del producto tensorial, sabemos que existe un único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\phi : R/I \otimes_R M \to M/IM$ tal que:

$$\phi((r+I)\otimes m) = rm + IM$$

Ahora definimos $\psi : M/IM \to R/I \otimes_R M$ tal que $\psi(m+IM) = (1+I)\otimes m$ y lo primero que vemos es que ψ está bien definida, ya que si $m + IM = IM$, entonces $m \in IM$, es decir $m = \sum i_j m_j$ con $i_j \in I$ y $m_j \in M$ y de aquí que:

$$(1+I)\otimes m = (1+I)\otimes(\sum i_j m_j) = \sum(1+I)\otimes i_j m_j = \sum(i_j+I)\otimes m_j = 0$$

Ahora vemos que ψ es homomorfismo de grupos:

$\psi((m_1+IM)+(m_2+IM)) = \psi((m_1+m_2)+IM) = (1+I)\otimes(m_1+m_2)$
$= (1+I)\otimes m_1 + (1+I)\otimes m_2$
$= \psi(m_1+IM) + \psi(m_2+IM)$

Finalmente, para concluir con la prueba de este inciso, solamente nos falta demostrar que ϕ y ψ son la inversa una de la otra. En efecto, tenemos que ambas composiciones son la identidad correspondiente:

(i) $\phi\psi(m+IM) = \phi((1+I)\otimes m) = 1\cdot m + IM = m + IM$.

(ii) $\psi\phi((r+I\otimes m) = \psi(rm+IM) = (1+I)\otimes rm = (1+I)r\otimes m = (r+I)\otimes m$.

Por lo tanto ϕ (y ψ) es un $\mathbb{Z}$-isomorfismo. □

Ejercicio 4.33(b) (ii) Si tomamos $M = R/L$ y aplicamos el inciso anterior, tenemos que:

$$R/I \otimes_R R/L \simeq R/I\,(R/L)$$

Pero es muy fácil verificar la igualdad:

$$I\,(R/L) = ((I+L)/L)$$

Así que sustituyendo tenemos que:

$$R/I \otimes_R R/L \simeq (R/L) \,/\, ((I+L)/L) \simeq R/(I+L)$$

$\square$

Ejercicio 4.33(c) (iii) Sabemos que si $d = (m, n)$, entonces $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$. Así que si aplicamos el resultado del inciso anterior tenemos la siguiente cadema de isomorfismos:

$$\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/\left(m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}\right) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_d$$

$\square$

Ejercicio 5.34. Por el teorema 5.5, sabemos que existe un módulo libre F_0 y una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S_0 \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

De la misma forma, existe un módulo libre F_1 y una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow F_1 \longrightarrow S_0 \longrightarrow 0$$

y por un argumento inductivo, existe un módulo libre F_n y una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S_n \longrightarrow F_n \longrightarrow S_{n-1} \longrightarrow 0$$

Ahora juntamos todas estas sucesiones en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_3 \arrow[rr, "d_3"] \arrow[dr] & & F_2 \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dr] & & F_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr] & & F_0 \arrow[r, "\epsilon"] & M \arrow[r] & 0 \\
\cdots & & S_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
\cdots & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

donde los R-homomorfismos d_n son precisamente las composiciones indicadas en el diagrama.

Ahora bien, por un lado tenemos que $\ker d_n = S_n$ y por otro lado, $\operatorname{Im} d_n = S_{n-1}$ lo que prueba que $\operatorname{Im} d_{n+1} = \ker d_n$, es decir, el renglón superior del diagrama anterior es exacto.

Por lo tanto M tiene una resolución libre. ◀

Ejercicio 5.35. Primero notamos que la estructura de R/I-módulo de P/IP está dada como sigue:

$$(r+I)(x+IP) = rx + IP$$

la cual está bien definida ya que si $r \in I$ y $x \in P$, entonces $rx \in IP$.

Ahora bien, como ${}_RP$ es proyectivo, se sigue por el Teorema de las Bases Proyectivas (teorema 5.10), que existe un subconjunto $\{x_k\}_{k\in K} \subset P$ y R-homomorfismos $\{\phi_k : P \to R\}_{k\in K}$ tales que:

(i) Si $x \in P$, entonces $\phi_k(x) = 0$ para casi todo $k \in K$.

(ii) Si $x \in P$, entonces $x = \sum_{k\in K} \phi_k(x)x_k$.

Por lo tanto, por un lado tenemos que $\{x_k + IP\}_{k\in K} \subset P/IP$ y por otro lado, si consideramos la proyección canónica $\pi : R \to R/I$, entonces $\pi\phi_k : P \to R/I$ son R-homomorfismos tales que si $\lambda \in I$ y $x \in P$, entonces $\phi_k(\lambda x) = \lambda\phi_k(x) \in I$ lo que implica que $\pi\phi_k(\lambda x) = 0$, es decir, $IP \subset \ker(\pi\phi_k)$ y por el Teorema del Factor sabemos que existe un R-homomorfismo $\overline{\phi}_k : P/IP \to R/I$ tal que $\overline{\phi}_k\rho = \pi\phi_k$ donde $\rho : P \to P/IP$ es la proyección canónica.

Por lo tanto, $\overline{\phi}_k(x+IP) = \phi_k(x)+I$, $(x \in P)$ y de aquí se sigue que $\overline{\phi}_k$ es también un R/I-homomorfismo ya que:

$$\overline{\phi}_k\left((r+I)(x+IP)\right) = \overline{\phi}_k(rx+IP) = \phi_k(rx)+I = r\phi_k(x)+I = (r+I)(\phi_k(x)+I)$$

En resumen, tenemos un subconjunto $\{x_k+IP\}_{k\in K} \subset P/IP$ y R/I-homomorfismos $\{\overline{\phi}_k : P/IP \to R/I\}_{k\in K}$ tales que:

(a) $\overline{\phi}_k(x+IP) = \phi_k(x)+I = \overline{0}$ para casi todo $k \in K$ (ya que $\phi_k(x) = 0$ para casi todo $k \in K$).

(b) Si $x \in P$, entonces:

$$\sum_{k\in K} \overline{\phi}_k(x+IP)(x_k+IP) = \sum_{k\in K}(\phi_k(x)+I)(x_k+IP) = \sum_{k\in K}(\phi_k(x)x_k+IP)$$

$$= (\sum_{k\in K} \phi_k(x)x_k) + IP = x + IP$$

Por lo tanto, por el Teorema de las Bases Proyectivas se sigue que P/IP es R/I-módulo proyectivo. ◀

Ejercicio 5.36. Por el teorema 5.8 se sigue que como P y Q son R-módulos proyectivos, entonces existen R-módulos P' y Q' tales que $P \oplus P' = R^{(X)}$ y $Q \oplus Q' = R^{(Y)}$. Por lo tanto:

$$(P \oplus P') \otimes_R (Q \oplus Q') = R^{(X)} \otimes_R R^{(Y)}$$

Ahora bien, ya que el producto tensorial preserva sumas directas en ambas componentes, tenemos por un lado que:

$$(P \oplus P') \otimes_R (Q \oplus Q') \simeq (P \oplus Q) \otimes_R (P \oplus Q') \otimes_R (P' \oplus Q) \otimes_R (P' \oplus Q')$$

y por otro lado:

$$R^{(X)} \otimes_R R^{(Y)} \simeq \left(R^{(X)} \otimes_R R\right)^{(Y)}$$

Si aplicamos el teorema 4.8 sabemos que $R^{(X)} \otimes_R R \simeq R^{(X)}$ de donde:

$$\left(R^{(X)} \otimes_R R\right)^{(Y)} \simeq \left(R^{(X)}\right)^{(Y)}$$

Finalmente, por el corolario 5.1.1 sabemos que suma directa de libres, es libre, lo que implica que $\left(R^{(X)}\right)^{(Y)}$ es libre.

En conclusión, hemos probado que $P \otimes_R Q$ es sumando directo de un libre, lo que implica que $P \otimes_R Q$ es R-módulo proyectivo (teorema 5.8). ◀

Ejercicio 5.37. Primero recordamos que ya que S es S-R-bimódulo, entonces $S \otimes_R P$ tiene estructura de S-módulo izquierdo. Por otro lado, en vista de que P es un R-módulo izquierdo proyectivo, entonces sabemos por el teorema 5.8, que existe un R-módulo izquierdo Q tal que $P \oplus Q = R^{(X)}$. Por lo tanto, usando el hecho de que el producto tensorial abre sumas directas en ambas componentes, tenemos que:

$$(S \otimes P) \oplus (S \otimes_R Q) \simeq S \otimes_R (P \oplus Q) \simeq S \otimes_R R^{(X)}$$

Nuevamente por la proposición 4.9 tenemos el siguiente isomorfismo de grupos abelianos:

$$S \otimes_R R^{(X)} \simeq (S \otimes_R R)^{(X)}$$

el cual es fácil ver que también es isomorfismo de S-módulos izquierdos.

Finalmente, por el teorema 4.8 tenemos que $S \otimes_R R \simeq S$ lo que implica que $(S \otimes_R R)^{(X)} \simeq S^{(X)}$.

En conclusión, hemos demostrado que $S \otimes_R P$ es sumando directo del S-módulo libre $S^{(X)}$ lo que prueba que $S \otimes_R P$ es S-módulo izquierdo proyectivo (teorema 5.8). ◀

Ejercicio 5.38. Sea D un dominio y F su campo de cocientes. Sabemos entonces que:

$$F = \left\{ \frac{x}{y} \mid x, y \in D, y \neq 0 \right\}$$

Para ver que D está contenido esencialmente en F tenemos que probar que para cada $z \in F, z \neq 0$, existe $d \in D$ tal que $dz \in D$ y $dz \neq 0$.

En efecto, si $z \in F$, , $z \neq 0$, entonces $z = \frac{x}{y}$ con $x \neq 0$. Pero entonces tenemos que si hacemos $d = y \in D$, entonces:

$$dz = y\left(\frac{x}{y}\right) = x$$

con $x \in D$ y $x \neq 0$, que es lo que queríamos probar.

Por lo tanto $D \subset_e F$. ◀

Ejercicio 5.39. Sea D un dominio de ideales principales y F su campo de cocientes. Sabemos por el ejercicio anterior, que $D \subset_e F$. Por lo tanto, de acuerdo al teorema 5.21, para demostrar que F es la cápsula inyectiva de D, solamente nos resta demostrar que F es un D-módulo inyectivo, lo cual, según el teorema 5.16, es cierto si y sólo si F es D-módulo divisible.

En efecto, sean $\frac{x}{y} \in F$ y $d \in D$ con $d \neq 0$, entonces existe $\frac{x}{dy} \in F$ tal que:

$$d\left(\frac{x}{dy}\right) = \frac{x}{y}$$

Por lo tanto, F es D-divisible tal como queríamos demostrar. ◀

Bibliography

[1] Rotman, Joseph, *An Introduction to Homological Algebra*, 2nd. Edition, Universitext, Springer, 2008.

[2] Passman, Donald S., *A Course in Ring Theory*, AMS Chelsea Publishing, 2004.

[3] Anderson, F. W., and Fuller, K. R., *Rings and Categories and Modules*, 2nd. Edition, Springer-Verlag, New York, 1992.

[4] Lam, T.Y., *Lectures on Modules and Rings*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[5] Lambek, Joachim, *Lectures on Rings and Modules*, Blaisdell, Waltham, 1966.

[6] Stenstrom, Bo, *Rings of Quotients, An Introduction to Methods of Ring Theory*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[7] Mac Lane, Saunders, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, New-York, 1971.

[8] Mac Lane, Saunders, *Homology*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[9] Hilton, P., and Stammbach, U., *A Course in Homological Algebra*, Springer-Verlag, New-York, 1971.

[10] Wisbauer, Robert, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publisher, Reading, Düsseldorf, 1991.