



Diseño de sistemas de control de velocidad en lazo cerrado aplicados al motor de corriente directa

Onofre Morfin¹, Arnulfo Castro² y Miguel Murillo³

^{1,2,3} Universidad Autónoma de Ciudad Juárez,

Avenida del Charro No. 450 Norte

Ciudad Juárez, Chihuahua, México,

C.P. 32310



Correo correspondiente

omorfin@uacj.mx

Resumen

Se presenta la metodología de diseño de sistemas de control de velocidad para un motor de corriente directa con magnetización constante. Se proponen tres tipos de controladores; el primero es un controlador proporcional-integral básico, donde la acción del controlador estabiliza y dirige de forma directa y asintótica hacia cero la variable de error de velocidad; el segundo controlador aplica la técnica de linealización por retroalimentación de estados; mientras que el tercero aplica la técnica de linealización por control a bloques. En estos dos últimos se configura un controlador proporcional-integral robusto y se diseña una variable de superficie, misma que se estabiliza y dirige hacia cero en tiempo finito debido a la acción de la ley de control, logrando un movimiento asintótico estable hacia cero del error de velocidad. Finalmente, se presentan los resultados en simulación que validan el buen desempeño de los tres sistemas de control de velocidad propuestos.

Abstract

The methodology for the design of speed control systems for a direct current motor with constant magnetization is presented. Three types of controllers are proposed; the first one is a basic proportional-integral controller, where the controller action stabilizes and directs a speed error variable directly and asymptotically towards zero; the second controller applies the state feedback linearization technique; while the third one applies the linearization by block control technique. In these last two controllers, a robust proportional-integral controller is configured and a surface variable is designed, which is stabilized and directed towards zero in finite time due to the action of the control law, achieving a stable asymptotic movement towards zero of the error variable. Finally, the simulation results that validate the good performance of the three proposed speed control systems are presented.

Palabras clave: Modelo del motor de CD; Controlador de velocidad PI; retroalimentación de estados; control a bloques.

Keywords: DC motor model; proportional-integral speed controller; state feedback linearization; block control linearization.

Introducción

El motor de corriente directa se caracteriza por ser un sistema electromecánico muy flexible en su operación, además de que se puede controlar su velocidad muy fácilmente a partir del reposo, variando el voltaje de alimentación del devanado de armadura, y en velocidades superiores a la nominal, debilitando la magnetización de la máquina, es decir, reduciendo la corriente en el devanado de campo. El motor de CD trabaja en condiciones de par máximo debido al diseño en su estructura, donde la fuerza magnetomotriz producida por el devanado de campo está en cuadratura respecto a la fuerza magnetomotriz producida por el devanado de armadura (Sen, 2014). El motor de CD básicamente está

conformado por un devanado de campo dispuesto en el estator y un devanado de armadura dispuesto en el rotor. Al alimentar con un voltaje al devanado de campo se produce la magnetización de la máquina y al alimentar con un voltaje al devanado de armadura circula una corriente que interactúa con el campo magnético y produce una fuerza tangencial en cada uno de los conductores del devanado de armadura, con un efecto multiplicativo, por lo que el motor de CD produce un par torsional electromagnético con el cual le imprime un movimiento giratorio al sistema mecánico acoplado en su flecha (Chapman, 2012). En la Figura 1, se muestra un esquema de la operación del motor de CD y su circuito eléctrico equivalente para interpretar su funcionamiento dinámico y en estado estable.

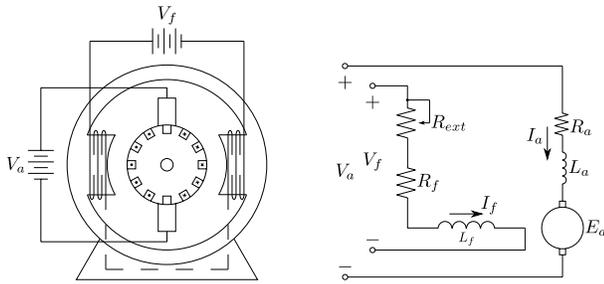


Figura 1. Esquema del motor de CD y su circuito equivalente Fuente: Elaboración propia.

Modelo del motor de corriente directa

El motor de CD se caracteriza por ser un sistema muy flexible en su operación, por lo que se puede representar por un modelo no lineal de tercer orden con dos entradas y dos salidas a controlar, también se puede representar por un sistema lineal de primer orden o por uno de segundo orden, ambos con una entrada y una salida a controlar. Además, es bien sabido que el diseño de un sistema de control en lazo cerrado parte del conocimiento del sistema a controlar y de su modelo en espacio de estados, por lo que se pueden diseñar sistemas diferentes para controlar la velocidad del motor de CD.

Modelo del motor de CD con magnetización independiente

El motor de CD se caracteriza por ser una planta muy flexible en su funcionamiento desde el punto de vista de los sistemas de control en lazo cerrado, ya que su modelo puede ser lineal, no lineal, de una entrada-una salida, de múltiples entradas-múltiples salidas. Un modelo del motor de CD con excitación de campo independiente, que involucra la dinámica en el sistema mecánico del tren de flechas, la dinámica en el devanado de armadura y la dinámica del devanado de campo, conforma el modelo no lineal en espacio de esta-

dos de tercer orden el cual tiene la siguiente representación: (Krause, Wasynczuk, and Sudhoff, 2002).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \omega_m &= \frac{K_a}{J_m} \phi_m i_a - \frac{B_m}{J_m} \omega_m - \frac{1}{J_m} T_L \\ \frac{d}{dt} i_a &= -\frac{K_a}{L_a} \phi_m \omega_m - \frac{R_a}{L_a} i_a + \frac{1}{L_a} u_a \\ \frac{d}{dt} i_f &= -\frac{R_f}{L_f} i_f \end{aligned} \quad (1)$$

donde: $\phi_m = f(i_f)$

donde ω_m es la velocidad angular del rotor en rad/s , i_a es la corriente en el devanado de armadura y ϕ_m es el flujo de magnetización y es una función no lineal de la corriente de campo i_f , estas variables corresponden a las variables de estado del sistema; T_L es el par de la carga, u_a es el voltaje de alimentación al devanado de armadura, estas variables corresponden a las entradas del sistema mecánica y eléctrica, respectivamente; K_a es la constante del devanado de armadura, J_m y B_m son el momento de inercia y el coeficiente de fricción de las flechas acopladas del motor y de la carga mecánica, R_a y L_a son la resistencia y la inductancia del devanado de armadura, finalmente, R_f y L_f son la resistencia e inductancia del devanado de campo, estas variables corresponden a los parámetros de la máquina.

Modelo del motor de CD con magnetización constante

Cuando el motor de CD opera en condiciones de magnetización constante, su operación es equivalente a un motor de CD de imanes permanentes. En la magnetización de este tipo de máquina, la relación entre la corriente del devanado de campo i_f , como causa, y el flujo de magnetización de la máquina ϕ_m , como efecto, se puede aproximar mediante la relación lineal, $\phi_m = K i_f$, lo cual se justifica debido a la presencia del entrehierro para que el rotor tenga libertad de movimiento. Tomado en cuenta la anterior condición de linealidad, el motor de CD se puede modelar mediante un sistema lineal de segundo orden con una entrada-una salida con la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \omega_m &= -\frac{B_m}{J_m} \omega_m + \frac{K_m}{J_m} i_a - \frac{1}{J_m} T_L \\ \frac{d}{dt} i_a &= -\frac{K_m}{L_a} \omega_m - \frac{R_a}{L_a} i_a + \frac{1}{L_a} u_a \end{aligned} \quad (2)$$

donde $K_m = K_f I_f$, cuando la magnetización del motor es constante.

Modelo de orden reducido del motor de CD

Teniendo en cuenta que la ecuación de estado de la velocidad tiene una dinámica muy lenta respecto a la ecuación de estado de la corriente de armadura en el modelo (2), la dinámica del circuito de armadura se puede despreciar al anular el voltaje de autoinducción en el devanado de armadura que equivale a despreciar su inductancia, y en consecuencia, el motor de CD con magnetización constante se puede modelar mediante un sistema lineal de primer orden. Por lo tanto, despreciando el valor de la inductancia L_a y resolviendo para la corriente del devanado de armadura i_a en la segunda ecuación de (2) resulta:

$$i_a = -\frac{K_m}{R_a} \omega_m + \frac{1}{R_a} u_a \quad (3)$$

Al substituir la corriente de armadura (3) en la ecuación de estado de la velocidad en (2), se obtiene el modelo lineal de primer orden del motor de CD con magnetización constante, como sigue:

$$\frac{d}{dt} \omega_m = -\left(\frac{K_m^2}{J_m R_a} + \frac{B_m}{J_m} \right) \omega_m - \frac{1}{J_m} T_L + \frac{K_m}{J_m R_a} u_a \quad (4)$$

en donde la velocidad se puede controlar con un controlador proporcional-integral analógico.

Diseño del sistema de control de velocidad del motor de CD

En la presente sección se muestra la metodología de diseño de algunos sistemas de control de velocidad aplicados a un motor de CD con magnetización constante. Es importante resaltar que el proceso de diseño del controlador de velocidad parte del modelo en espacio de estados del motor de CD, en donde se aplica una transformación para obtener un modelo equivalente con variables de error de seguimiento.

Controlador de velocidad proporcional-integral básico

En la Figura 2, se muestra el esquema de control proporcional-integral básico de velocidad en lazo cerrado del motor de CD, el cual presenta la planta del sistema (motor de CD y un puente H de transistores como actuador) y la variable de salida a controlar que corresponde a la velocidad angular del motor ω_m . El objetivo de control consiste en que la velo-

cidad del motor alcance su velocidad de referencia en todo instante de tiempo en la presencia de perturbaciones externas al sistema, como lo son los cambios en el par de carga T_L aplicado al motor. Al comparar la velocidad de referencia con la velocidad del motor se define la variable de error de seguimiento de velocidad ε_ω , la cual es el argumento de la ley de control proporcional-integral u_a (Franklin, 2002).

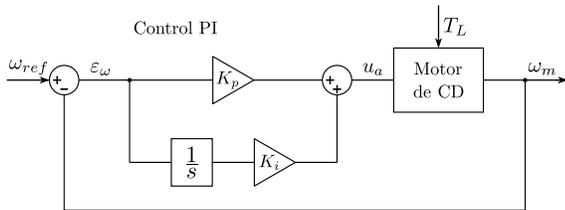


Figura 2. Controlador proporcional-integral básico

Fuente: Elaboració.

El diseño del controlador de velocidad proporcional-integral básico parte de la representación del modelo reducido del motor de CD con magnetización constante (4). Para resolver el problema de seguimiento de velocidad, conviene transformar el planteamiento del problema y resolver un problema de estabilización y desvanecimiento de la variable de error de seguimiento de velocidad, la cual es:

$$\varepsilon_\omega = \omega_{ref} - \omega_m \quad (5)$$

Para determinar el modelo reducido equivalente a (4) utilizando la variable ε_ω , es necesario calcular la dinámica del error de velocidad, en donde el punto arriba significa la derivada respecto al tiempo:

$$\dot{\varepsilon}_\omega = \dot{\omega}_{ref} - \dot{\omega}_m \quad (6)$$

substituyendo el modelo del motor de CD de primer or-

den (4) en (6), se obtiene:

$$\dot{\varepsilon}_\omega = -\left(\frac{K_m^2}{J_m R_a} + \frac{B_m}{J_m}\right)\varepsilon_\omega + \dot{\omega}_{ref} + \left(\frac{K_m^2}{J_m R_a} + \frac{B_m}{J_m}\right)\omega_{ref} + \frac{1}{J_m}T_L - \frac{K_m}{J_m R_a}u_a \quad (7)$$

en este modelo reducido equivalente del motor de CD (7), se visualiza la acción de la entrada de control u_a , la cual puede ser un control proporcional-integral con la siguiente representación (Ogata, 2010):

$$u_a = K_p \varepsilon_\omega + K_i \int_0^t \varepsilon_\omega d\tau \quad (8)$$

la primer acción del control u_a (8) consiste en estabilizar el movimiento del error de velocidad ε_ω (7) y no permitir que se desborde, la segunda acción consiste en dirigir el error de velocidad hacia cero, cancelando principalmente la perturbación externa del sistema, que consiste en el par de carga T_L aplicado al motor, y cancelando los términos que incluyen la velocidad de referencia ω_{ref} y su derivada. Con la acción de la entrada de control u_a en la representación equivalente del modelo reducido del motor de CD (7) se cumple con el objetivo de controlar la velocidad. Adicionalmente, la acción de control u_a debe ejercer un movimiento asintótico del error de velocidad hacia cero, para suavizar los esfuerzo mecánicos en el sistema, por lo que al aplicar la ley de control (8) en el sistema (7), se obtiene:

$$\dot{\varepsilon}_\omega = -K_1 \varepsilon_\omega \quad (9)$$

Por lo tanto, la entrada de control inducirá el movimiento asintótico estable mostrado en (9), donde K_1 corresponde al polo que define la rapidez de movimiento de la variable de error de velocidad ε_ω y se espera sea mayor a

$$K_1 > \left(\frac{K_m^2}{J_m R_a} + \frac{B_m}{J_m}\right) \quad (10)$$

para que con esto, el control de velocidad del motor se realice con una dinámica más rápida respecto al control en lazo abierto, mostrado en el modelo equivalente del motor de CD de orden reducido (7).

En el proceso de sintonización de la ley de control proporcional-integral u_a (8) para dirigir el movimiento del error de velocidad ε_ω (6) hacia cero en forma asintótica, el término proporcional $K_p \varepsilon_\omega$ entrega la energía para cancelar los términos externos al sistema (7): el par de la carga mecánica T_L , la velocidad de referencia ε_ω y su derivada. La limitante en la acción de control proporcional lo define el voltaje nominal del devanado de armadura, y es inevitable que se presente un margen de error en estado estable. Mientras que el término integral restablece el error de velocidad en cero cuando se presente un disturbio externo al sistema, como puede ser un cambio en el par de la carga T_L o un cambio en la velocidad de referencia ω_{ref} .

Controlador de velocidad PI robusto

El controlador proporcional-integral básico tiene como argumento la variable de error de seguimiento ε_ω , y una vez que ha sido sintonizado, estabiliza y dirige el error de velocidad hacia cero en forma asintótica, cumpliéndose el objetivo de controlar la velocidad del motor de CD. El controlador PI básico actúa con efectividad en la regulación de velocidad del motor de CD. No obstante, si se requiere mayor robustez y presentar más efectividad en un seguimiento de trayectoria de velocidad, es posible configurar un controlador proporcional robusto, partiendo del modelo de segundo orden del motor de CD con magnetización constante (2). En la presente sección se aplican dos técnicas para lograr esto, la técnica de linealización por retroalimentación de estados y la técnica de linealización por control a bloques.

Controlador de PI robusto por retroalimentación de estados

En la Figura 3, se muestra el esquema de control robusto donde se aplica la técnica de linealización por retroalimentación de estados. La planta del sistema está conformada por el motor de CD como proceso y un puente H de transistores como actuador. Al comparar la velocidad de referencia ω_{ref} con la velocidad del motor ω_m se define la variable de error de seguimiento ε_ω . Posteriormente se aplica la técnica de linealización por retroalimentación de estados para definir la variable de superficie s que corresponde al argumento de la ley de control proporcional-integral u_a (Khalil, 2002). En una aplicación en tiempo real en el laboratorio, la señal de control se acondiciona con la técnica de modulación por ancho de pulso (PWM) para activar los transistores y definir voltaje del devanado de armadura.

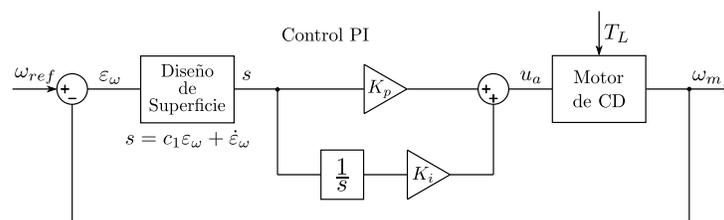


Figura 3. Controlador PI robusto por retroalimentación de estados. Fuente: Elaboración propia.

En el proceso de diseño del sistema de control robusto por retroalimentación de estados se establece una representación equivalente al modelo del motor de CD (2), con los mismos modos de operación y con nuevas variables, dicha representación se identificada con el nombre de forma canónica controlable. El proceso de diseño parte del modelo del motor de CD con magnetización constante (2). La primera nueva variable se define como la variable de error de seguimiento de velocidad, de la siguiente manera:

$$\varepsilon_1 = \omega_{ref} - \omega_m \tag{11}$$

cuya ecuación de estado se calcula con la siguiente operación:

$$\dot{\epsilon}_1 = \dot{\omega}_{ref} - \dot{\omega}_m \quad (12)$$

substituyendo la ecuación mecánica de estado del modelo del motor de CD (2) en (12), se obtiene:

$$\dot{\epsilon}_1 = \dot{\omega}_{ref} + \frac{B_m}{J_m} \omega_m - \frac{K_m}{J_m} i_a + \frac{1}{J_m} T_L \quad (13)$$

La segunda nueva variable se define como la derivada respecto al tiempo del error de velocidad ϵ_2 , es decir:

$$\epsilon_2 = \dot{\epsilon}_1 \quad (14)$$

cuya dinámica es:

$$\dot{\epsilon}_2 = \ddot{\omega}_{ref} + \frac{B_m}{J_m} \dot{\omega}_m - \frac{K_m}{J_m} \frac{d}{dt} i_a + \frac{1}{J_m} \dot{T}_L \quad (15)$$

substituyendo el modelo del motor de CD (2) en (15), se obtiene:

$$\dot{\epsilon}_2 = -\left(\frac{K_m^2}{J_m L_a} + \frac{1}{\tau_m \tau_a}\right) \epsilon_1 - \left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{1}{\tau_a}\right) \epsilon_2 + g(t) - \frac{K_m}{J_m L_a} u_a \quad (16)$$

donde

$$g(t) = \ddot{\omega}_{ref} + \left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{1}{\tau_a}\right) \dot{\omega}_{ref} + \left(\frac{K_m^2}{J_m L_a} + \frac{1}{\tau_m \tau_a}\right) \omega_{ref} + \frac{1}{J_m} \dot{T}_L + \frac{1}{J_m \tau_a} T_L$$

y

$$\tau_m = \frac{J_m}{B_m}, \quad \tau_a = \frac{L_a}{R_a}$$

$g(t)$ corresponde a los términos que incluyen las perturbaciones externas al sistema y τ_m y τ_a son las constantes de tiempo del sistema mecánico del motor y del devanado de armadura, respectivamente. Uniendo las ecuaciones (14) y (16), se obtiene la forma canónica controlable, de la siguiente forma (Morfin, Castañeda, Valderrabano-Gonzalez, Hernández-Gonzalez, y Valenzuela, 2017):

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \epsilon_2 \\ \dot{\epsilon}_2 &= -\left(\frac{K_m^2}{J_m L_a} + \frac{1}{\tau_m \tau_a}\right) \epsilon_1 - \left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{1}{\tau_a}\right) \epsilon_2 + g(t) - \frac{K_m}{J_m L_a} u_a \end{aligned} \quad (17)$$

la cual es equivalente al modelo del motor de CD con magnetización constante. Analizando la estructura equivalente de este modelo, la acción de control u_a estabiliza y dirige la derivada del error de velocidad ϵ_2 hacia cero en forma asintótica, y esta a su vez dirige la variable de error de velocidad hacia cero en forma asintótica con la energía que tenga en su movimiento. Por lo cual, al aplicar en forma directa un control proporcional-derivativo de primer orden:

$$u_a = K_p \epsilon_1 + K_d \epsilon_2 \quad (18)$$

a la representación en forma canónica del modelo del motor de CD (17), se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \epsilon_2 \\ \dot{\epsilon}_2 &= -K_1 \epsilon_1 - K_2 \epsilon_2 \end{aligned} \quad (19)$$

cuyos eigenvalores se calculan mediante la siguiente relación:

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 & -K_2 \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (20)$$

con el siguiente polinomio característico:

$$\lambda^2 + K_2 \lambda + K_1 = 0 \quad (21)$$

los eigenvalores α_1 y α_2 , raíces de (21), cumplen las siguientes relaciones $\alpha_1 + \alpha_2 = K_2$ y $\alpha_1 \alpha_2 = K_1$, mismos que se deben seleccionar con un valor mayor a los eigenvalores del motor de CD en lazo abierto ρ_1 y ρ_2 para acelerar la convergencia del movimiento de la variable controlada, dichos eigenvalores se determinan de la matriz del sistema (2) a partir de:

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{B_m}{J_m} & \frac{K_m}{J_m} \\ -\frac{K_m}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (22)$$

Al aplicar un control por retroalimentación de estados proporcional-integral-derivativo de la forma:

$$u_a = K_p \varepsilon_1 + K_i \int_0^t \varepsilon_1 d\tau + K_d \varepsilon_2 \quad (23)$$

se aumenta el orden del sistema (19), el cual resulta en:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_0 &= \varepsilon_1 \\ \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2 \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -K_0 \varepsilon_0 - K_1 \varepsilon_1 - K_2 \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (24)$$

Al aplicar el control PD o PID por retroalimentación de estados, el sistema de control de velocidad resultante no es lo suficientemente robusto como para resolver un problema de seguimiento de trayectoria de velocidad. Por lo que comúnmente se propone el siguiente sistema

$$s = C_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (25)$$

el cual se distingue por ser un sistema de primer orden, ya que al calcular su dinámica y substituir el sistema (17)

$$\dot{s} = C_1 \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = C_1 \varepsilon_2 + -\left(\frac{K_m^2}{J_m L_a} + \frac{1}{\tau_m \tau_a}\right) \varepsilon_1 - \left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{1}{\tau_a}\right) \varepsilon_2 + g(t) - \frac{K_m}{J_m L_a} u_a \quad (26)$$

está presente el control u_a , cuya acción dirige a cero al sistema $s = 0$ (25) y a su primer derivada $\dot{s} = 0$ (26) en tiempo finito, provocando el siguiente movimiento asintótico de la variable de error de seguimiento de velocidad ε_1 , a partir de (25):

$$\dot{\varepsilon}_1 = -C_1 \varepsilon_1 \quad (27)$$

al desvanecer en forma asintótica el error de seguimiento de velocidad (27) con una rapidez definida por el polo $C_1 > 0$, el cual debe tener un valor mayor al eigenvalor correspondiente al error de velocidad en el modelo en lazo abierto (2), se logra el objetivo de controlar la velocidad del motor de CD en forma robusta. Por lo que la entrada de control u_a debe tener como argumento al sistema s , y un controlador proporcional-integral toma la forma:

$$u_a = K_p s + K_i \int_0^t s d\tau \quad (28)$$

En el nuevo sistema propuesto (26), la acción de control actúa de una manera eficaz y directa para cancelar los términos que involucran las perturbaciones externas al sistema, los cuales están integrados en $g(t)$, y dirigir el sistema s en tiempo finito hacia cero, y lograr en consecuencia, el movimiento asintótico del error de velocidad de acuerdo a (27), y con esto lograr el objetivo de controlar la velocidad del motor de CD.

Controlador PI robusto por control a bloques

En la Figura 4, se muestra el esquema de control robusto de velocidad del motor de CD donde se aplica la técnica de linealización por control a bloques. El motor de CD junto con el actuador (puente H de transistores) conforman la planta del sistema, el objetivo de control se cumple cuando la velo-

cidad del motor ω_m alcanza la velocidad de referencia ω_{ref} , y la comparación de estas variables definen la variable de error de velocidad ε_ω , para posteriormente aplicar la técnica de linearización por control a bloques para definir la superficie s que corresponde al argumento de la ley de control proporcional-integral u_a (Loukianov, 2002). En una aplicación en el laboratorio, la señal de control se acondiciona con la técnica de modulación por ancho de pulso (PWM) para activar las compuertas de los transistores y de esta forma definir el nivel de voltaje aplicado al devanado de armadura del motor de CD.

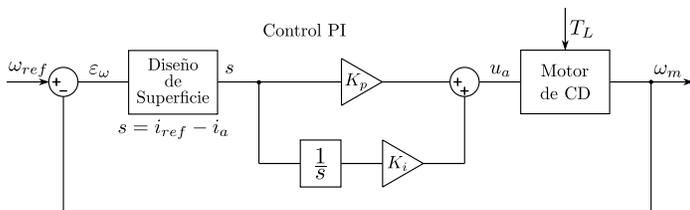


Figura 4. Controlador PI robusto por control a bloques Fuente: Elaboración propia.

Al aplicar la técnica de linearización por control a bloques se establece un sistema equivalente al motor de CD (2), con nuevas variables y los mismos eigenvalores, cuya representación se denomina forma controlable a bloques. El diseño del sistema de control de velocidad parte del modelo del motor de CD con magnetización constante definido en (2). La primera variable se define como el error de velocidad

$$\varepsilon_1 = \omega_{ref} - \omega_m \quad (29)$$

cuya dinámica se define con un movimiento asintótico estable, de la siguiente forma:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\omega}_{ref} - \dot{\omega}_m = -K_1 \varepsilon_1 \quad (30)$$

substituyendo la ecuación mecánica del modelo del motor de CD (2) en (30), se obtiene

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\omega}_{ref} + \frac{B_m}{J_m} \omega_m - \frac{K_m}{J_m} i_a + \frac{1}{J_m} T_L = -K_1 \varepsilon_1 \quad (31)$$

La técnica de control a bloques consiste en representar un sistema de orden n en n subsistemas de primer orden los cuales se resuelven en forma recursiva. Por lo tanto, el modelo equivalente del motor de CD en la forma controlable a bloques tiene la estructura de dos sistemas de primer orden los cuales se resuelven en forma independiente. Por lo que para establecer la dinámica asintóticamente estable en (31) se define la corriente de referencia i_{ref} al resolver para la corriente de armadura, la cual es:

$$i_{ref} = \frac{J_m}{K_m} \dot{\omega}_{ref} + \frac{B_m}{K_m} \omega_m + \frac{1}{K_m} T_L + \frac{K_1 J_m}{K_m} \varepsilon_1 \quad (32)$$

La segunda variable de error se define en términos del error de seguimiento en corrientes, como sigue:

$$\varepsilon_2 = i_{ref} - i_a \quad (33)$$

cuya dinámica es:

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{d}{dt} i_{ref} - \frac{d}{dt} i_a \quad (34)$$

al derivar la corriente de referencia respecto al tiempo y substituyendo la ecuación de estado de la corriente de armadura del modelo del motor de CD (2) en (34), se obtiene:

$$\dot{\varepsilon}_2 = - \left(\frac{K_1^2 J_m}{K_m} + \frac{K_m}{L_a} - \frac{B_m^2}{K_m J_m} \right) \varepsilon_1 - \left(\frac{B_m}{J_m} + \frac{R_a}{L_a} \right) \varepsilon_2 + g(t) - \frac{1}{L_a} u_a \quad (35)$$

$$g(t) = \frac{J_m}{K_m} \ddot{\omega}_{ref} + \left(\frac{K_m}{L_a} - \frac{B_m^2}{K_m J_m} \right) \omega_{ref} + \left(\frac{B_m}{J_m} + \frac{R_a}{L_a} \right) i_{ref} + \frac{1}{K_m} \dot{T}_L - \frac{B_m}{K_m J_m} T_L$$

Substituyendo la variable de error en corrientes ε_2 (33) en (31) y en unión con la ecuación de estado (35) se obtiene la forma controlable a bloques con la siguiente representación:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= -K_1 \varepsilon_1 - \frac{K_m}{J_m} \varepsilon_2 \\ \dot{\varepsilon}_2 &= - \left(\frac{K_1^2 J_m}{K_m} + \frac{K_m}{L_a} - \frac{B_m^2}{K_m J_m} \right) \varepsilon_1 - \left(\frac{B_m}{J_m} + \frac{R_a}{L_a} \right) \varepsilon_2 + g(t) - \frac{1}{L_a} u_a \end{aligned} \quad (36)$$

analizando este sistema, que es equivalente al modelo del motor de CD (2), se identifica que la acción de la entrada de control u_a cancela los términos que incluyen las perturbaciones externas en $g(t)$, desvanece el movimiento de ε_2 y dirige la variable ε_2 hacia cero en tiempo finito y en consecuencia, la corriente de armadura i_a alcanza su valor de referencia, de acuerdo a (32) y por lo tanto, el movimiento de la variable ε_2 establece el movimiento asintótico de la variable de error de seguimiento de velocidad ε_1 , con lo que se cumple el objetivo de controlar la velocidad del motor de CD. Con base en este análisis, el argumento de la entrada de control es:

$$s = \varepsilon_2 \quad (37)$$

y con un control proporcional-integral:

$$u_a = K_p s + K_i \int_0^t s d\tau \quad (38)$$

se forza tanto $\dot{s} = 0$ y $s = 0$, obteniéndose el movimiento asintótico del error de velocidad, de acuerdo a (31):

$$\dot{\varepsilon}_1 = -K_1 \varepsilon_1 \quad (39)$$

en donde $K_1 > 0$ define la rapidez del movimiento de ε_1 y se recomienda que su valor sea mayor al eigenvalor de la velocidad en el modelo en lazo abierto (2). Al desvanecer en forma asintótica el error de velocidad ε_1 , se cumple el objetivo de controlar la velocidad del motor de CD en forma robusta.

Resultados de simulación

Se presentan en esta sección resultados de desempeño del controlador de velocidad proporcional-integral básico, del controlador de velocidad proporcional - integral robusto por retroalimentación de estados y del controlador de velocidad-integral robusto por control a bloques. Como primer paso se configuran la señal de seguimiento de velocidad y los cambios en el par de carga del motor, como perturbaciones externas al sistema y se simula la operación en lazo abierto en condiciones de operación nominal para identificar sus márgenes de operación. En las simulaciones efectuadas se utiliza el método numérico Runge-Kutta para resolver el sistema en lazo cerrado con un paso de solución de 0.0001 s.

Velocidad de referencia y cambios en el par de carga

Se configura una señal de referencia apropiada para una aplicación en tiempo real con un retardo de 5 s y una rampa de aceleración constante del motor, para evitar que la corriente de armadura del motor tenga incrementos súbitos arriba del valor nominal en el arranque. La rampa de aceleración se configuró con una pendiente de 375 r.p.m. por cada segundo, la cual se satura en 1500 r.p.m. Posteriormente se realizan tres incrementos súbitos de 100 r.p.m., en forma de escalón, en el valor de velocidad de referencia, a los 13, 17 y 21 s, alcanzando finalmente una velocidad de 1800 r.p.m., por arriba de la velocidad nominal de 1750 r.p.m. Respecto a los cambios en el par de la carga, se configuran incrementos en forma de pulsos que varían de 0 a 0.75 N.m, siendo el par nominal del motor de 1.0 N.m. El primer pulso se presenta a los 11 s con una duración de 4 s, el segundo pulso se presenta

a los 19 s con la misma duración de 4 s en el pulso (Morfin, y otros, 2021). Finalmente, en la Tabla 1. se muestran los datos de placa y los parámetros del motor de CD con magnetización constante de la marca LabVolt (8211-02).

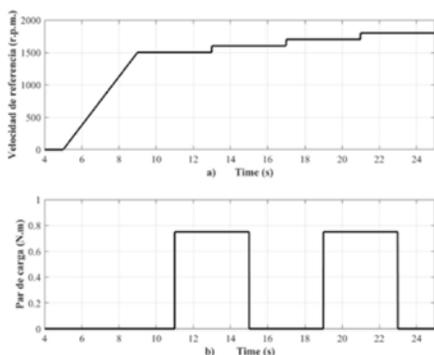


Figura 5. Perturbaciones externas al sistema de control Fuente: Elaboración propia.

Tabla 1. Datos de placa y parámetros del motor de CD.

Datos de placa del motor	Parámetros del motor
Potencia 180 W	Resistencia de armadura, R_a 12.5 Ω
Voltaje de campo 120 V	Inductancia de armadura, L_a 0.075 H
Corriente de campo 0.5 A	Constante del motor, K_m 0.6505
Voltaje de armadura 120 V	Momento de inercia, J_m 0.0036 N.m.s ²
Corriente de armadura 3.0 A	Coefficiente de fricción, B_m 0.002 N.m.s
Velocidad del motor 1750 r.p.m.	

Controlador de velocidad PI básico

En la Figura 6, se muestra el desempeño del sistema de control de velocidad proporcional-integral básico,

$u_a = 10\varepsilon_\omega + 15\int_0^t \varepsilon_\omega d\tau$, el cual puede implementarse en forma analógica, debido a que únicamente se necesita sensar la velocidad angular del motor. El argumento de la ley de control es el error de seguimiento de velocidad ε_ω definido en (5) y es mostrado en la Figura 6 a). A los 15 y 23 s el par

de carga baja de 0.75 a 0 N.m en forma de escalón, mientras que a los 19 s sube el par de carga en forma de escalón de 0 a 0.75 N.m (Figura 5), siendo el par nominal del motor de 1.0 N.m. Ante los cambios en el par descritos, se tiene un tiempo de restablecimiento en el seguimiento de velocidad de 2 s, ver Figura 6 b). Cuando se presenta el cambio de la velocidad de referencia en forma de escalón de 1700 a 1800 r.p.m., no se presenta sobreimpulso en la respuesta de velocidad, y se presenta un tiempo de restablecimiento del seguimiento de velocidad de 0.1 s. El desempeño del sistema de control PI básico es efectivo, presenta robustez para cancelar los cambios en el par de la carga y una buena respuesta dinámica ante cambios en forma de escalón de la velocidad de referencia.

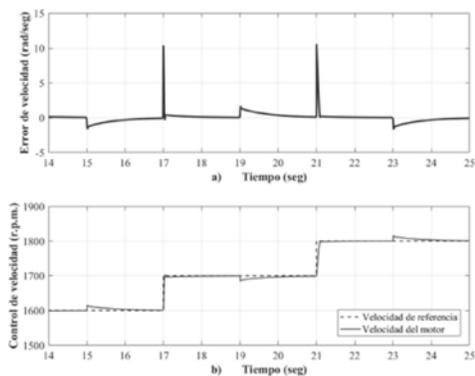


Figura 6. Desempeño del controlador PI básico Fuente: Elaboración propia.

Controlador PI robusto por retroalimentación de estados

En la implementación física del controlador proporcional-integral robusto, donde se aplica la técnica de linearización por retroalimentación de estados, se necesita sensar la velocidad, sensar la corriente de armadura y estimar el par de la carga mediante un observador asintótico de par. Con la información de estas variables y de algunos parámetros de máquina, se ocupa un microprocesador o microcontrolador para calcular la derivada respecto al tiempo del error de velocidad, es decir, la variable ε_2 relacionando (14) y (13).

Una alternativa sería diseñar un diferenciador robusto ante la presencia de ruido en la velocidad sensada, y de esta forma, estimar la variable ε_2 , en lugar de calcularla. En la Figura 7 se muestra el desempeño de este controlador PI robusto, $u_a = 1.5s + 2.0 \int_0^t s dt$. La variable de superficie $s = C_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ se muestra en la Figura 7 a), este sistema o variable es el argumento de la ley de control proporcional-integral. La acción de control consiste en forzar a cero la superficie s , cuando se presenta un cambio en el par de carga, en los 15, 19 y 23 s, y también cuando se presenta un cambio en la velocidad de referencia, a los 17 y 21 s, ambos cambios se presentan en forma de escalón. Cuando se presentan los cambios en el par de carga, la velocidad tiene una pequeña oscilación de 1.0 r.p.m. y alcanza nuevamente su valor de referencia después de un segundo, de acuerdo a la escala de la Figura 7 b), el cambio en la velocidad se aprecia mínimo. Cuando se presenta el cambio en forma de escalón de la señal de referencia de 1700 a 1800 r.p.m., la velocidad tiene un tiempo de restablecimiento de 0.08 s, sin presentar sobreimpulso. La acción de la ley de control fuerza a la variable de superficie a cero en tiempo finito, y en consecuencia se obtiene el movimiento asintótico de la variable de error de velocidad: $\dot{\varepsilon}_1 = -C_1 \varepsilon_1$ en donde se definió el polo $C_1 = 80$, valor con el cual se tiene un tiempo de desvanecimiento de 0.056 s. El controlador proporcional-integral robusto por retroalimentación de estados tiene un desempeño efectivo en el control de la velocidad del motor, y su metodología se puede aplicar en otras máquinas eléctricas cuyos modelos son de mayor orden, con múltiples entradas-múltiples salidas y más complejos, como es el caso del motor de inducción trifásico y el generador síncrono trifásico de imanes permanentes, entre otras máquinas.

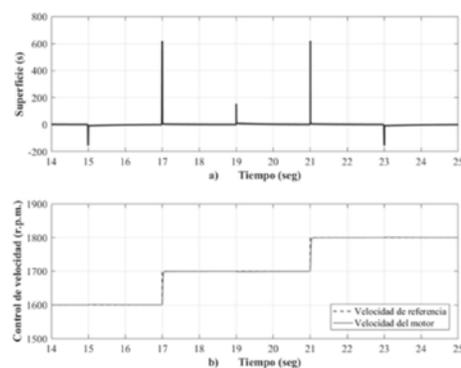


Figura 7. Controlador PI robusto por retroalimentación de estados. Fuente: Elaboración propia.

Controlador PI robusto por control a bloques

En la implementación física del controlador proporcional-integral (PI) aplicando la técnica de linearización por control a bloques, al igual que el controlador PI por retroalimentación de estados, se requiere de un microprocesador o microcontrolador para realizar el cálculo de la variable de superficie $s = i_{ref} - i_a$ en donde el cálculo de la corriente de referencia i_{ref} (32) involucra parámetros del motor y sensar la velocidad angular y estimar el par de la carga mediante un observador asintótico de par, además, para definir la superficie s , también se ocupa sensar la corriente del devanado de armadura i_a .

En la Figura 8, se muestra el desempeño del controlador robusto por control a bloques, $u_a = 100s + 300 \int_0^t s dt$ en donde la variable de superficie está definida por el error de seguimiento en la corriente de armadura. A los 15 y 23 s se presentan cambios de 0.75 a 0 N.m en el par de carga, mientras que a los 19 s cuando el par cambia en forma súbita de 0 a 0.75 N.m, siendo el par nominal de 1.0 N.m. Ante estos cambios en el par de carga, la velocidad del motor tiene una oscilación mínima de 2.0 r.p.m. que se desvanece en 0.09 s. Cuando se presenta el cambio en forma de escalón de la velocidad de referencia de 1700 a 1800 r.p.m., la respuesta en la velocidad del motor no presenta sobreimpulso y tiene un tiempo de restablecimiento de 0.09 s. Podemos concluir entonces, que

el controlador proporcional-integral robusto por control a bloques presenta un desempeño muy efectivo en el control de la velocidad del motor de CD. La metodología utilizada en el diseño del controlador de velocidad del motor de CD con la técnica de linealización por control a bloques, en donde se realiza el control a través de las corrientes, resulta una técnica muy eficaz en el control de motores de corriente alterna, en el control de convertidores para elevar o reducir un voltaje en CD, así como también, en el control de voltaje del bus de CD de los inversores trifásicos utilizados como interfaz de potencia en la conexión de una fuente de energía renovable con la red eléctrica.

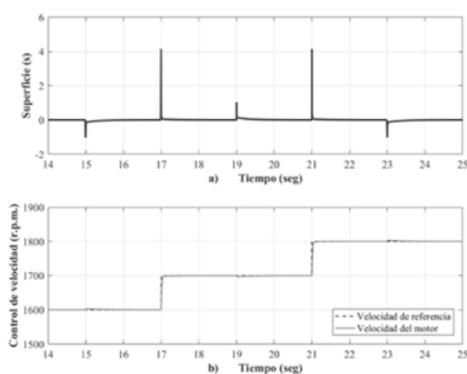


Figura 8. Controlador PI robusto por control a bloques.

Fuente: Elaboración propia.

Conclusión

Se validaron mediante simulación tres sistemas de control de velocidad aplicados al motor de CD en donde se evaluó la respuesta dinámica del seguimiento de velocidad ante la presencia de perturbaciones externas, tales como incrementos de 100 r.p.m.p en forma de escalón de la velocidad de referencia y cambios en el par de carga en forma de pulsos, de la condición de vacío a 0.75 N.m, que corresponde a un 75 % del par nominal. De los resultados obtenidos, se distingue que el controlador proporcional-integral básico tiene un desempeño aceptable en el seguimiento de la velo-

cidad de referencia y en su implementación física solo usaría un sensor de velocidad por lo que puede implementarse el controlador en forma analógica. Mientras que en los otros dos controladores PI robustos, se aplicaron las técnicas de linealización por retroalimentación de estados y por control a bloques, para diseñar en cada controlador una variable de superficie como argumento de la ley de control. Por retroalimentación de estados la variable de superficie se diseñó como una combinación lineal de las dos variables de error de seguimiento, mientras que en el control a bloques la variable de superficie se definió mediante el error de seguimiento de la corriente de armadura con su referencia. En estas dos técnicas, el desempeño del controlador es robusto debido a que la acción de control anula las no linealidades y cancela las perturbaciones externas al sistema, además de dirigir la superficie hacia cero en tiempo finito, con lo que se logra un movimiento asintótico hacia cero de la variable de error del seguimiento de la velocidad, y de esta forma se logra el objetivo de controlar la velocidad del motor. Es importante resaltar que las técnicas de control propuestas en este artículo pueden también aplicarse en el control de las máquinas de corriente alterna, como puede ser el motor de inducción y en el generador síncrono de imanes permanentes, entre otras máquinas; así como también en convertidores de electrónica de potencia, como lo es el regulador buck-boost en los sistemas fotovoltaicos o en el convertidor lado de la red para conectar una fuente de energía renovable con la red eléctrica.

Discusión

Los tres sistemas de control de velocidad propuestos aplicados al motor de CD tienen buen desempeño, por lo que la elección de alguno de ellos depende del tipo de aplicación. El controlador proporcional-integral básico incide directamente en la variable de error de velocidad para estabilizarla y dirigirla en forma asintótica hacia cero y no depen-

de de parámetros del motor, este controlador se distingue porque únicamente requiere un sensor de velocidad por lo que se puede implementar en forma analógica para controlar un motor de CD que maneje potencia y tenga una inercia grande. En aplicaciones de robótica en donde se requieren movimientos precisos, cualquiera de los dos controladores robustos propuestos puede utilizarse. El controlador robusto que aplica la técnica de linealización por retroalimentación de estados puede diseñarse con la característica de sensor-less, de tal forma que únicamente requiera sensar la corriente de armadura del motor de CD y evitar la estimación del par de la carga mediante el diseño de un observador asintótico, al incluir un diferenciador robusto que estime la derivada del error de velocidad. Mientras que el controlador robusto que aplica la linealización por control a bloques tiene la característica de realizar el control a través de una variable de error en corrientes, con lo cual se logra robustez cuando se presentan cambios en el par de carga o cuando cambia el valor de la velocidad de referencia. Es importante resaltar que la metodología planteada en el diseño de los dos controladores robustos de velocidad del motor de CD, puede ser aplicada a sistemas más complejos, como es el caso del control de velocidad de los motores de inducción jaula de ardilla, el control del par electromagnético del generador de inducción doblemente alimentado en sistemas eólicos, el control del inversor lado de la red en la interconexión de una fuente renovable con el sistema eléctrico, entre otras aplicaciones.

Símbolos

ω_m	Velocidad angular del motor	(rad/s)
i_a	Corriente del devanado de armadura	(A)
i_f	Corriente de campo	(A)
ϕ_m	Flujo de magnetización	(Wb)
T_L	Par de carga	(N·m)
u_a	Voltaje aplicado al devanado de armadura	(V)
K_a	Constante del devanado de armadura	
J_m	Momento de inercia	(N·m·s ²)
B_m	Coefficiente de fricción	(N·m·s)
L_a	Inductancia del devanado de armadura	(H)
R_a	Resistencia del devanado de armadura	(Ω)
L_f	Inductancia del devanado de armadura	(H)
R_f	Resistencia del devanado de campo	(Ω)
K_m	Constante del motor con magnetización constante	
e_m	Variable de error de velocidad	(rad/s)
ω_{ref}	Velocidad angular de referencia	(rad/s)
$\dot{\omega}_{ref}$	Variación respecto al tiempo de la velocidad de referencia	(rad/s ²)
$\ddot{\omega}_{ref}$	Segunda de derivada respecto al tiempo de la velocidad de referencia	(rad/s ³)
K_p	Ganancia del termino proporcional	
K_d	Ganancia del termino derivativo	
K_i	Ganancia del termino integral	
K_1	Ganancia de la dinámica estable del error de velocidad	
K_2	Ganancia de la dinámica estable de la variación del error de velocidad	
τ_m	Constante de tiempo del sistema mecánico del motor	(s)
τ_a	Constante de tiempo del devanado de armadura	(s)
s	Variable de superficie	
C_1	Polo del error de velocidad con retroalimentación de estados	
i_{ref}	Corriente de referencia	(A)

Referencias

- Chapman, S. J. (2012). Máquinas Eléctricas. Houston: Mc Graw Hill.
- Franklin, G. F. (2002). Feedback control of dynamics system. New Jersey: Prentice Hall.
- Khalil, H. K. (2002). Nonlinear Systems. New Jersey: Prentice Hall.
- Krause, P. C., Wasynczuk, O., y Sudhoff, S. D. (2002). Analysis of Electric Machinery and Drive Systems. New York: John Wiley and Sons.
- Loukianov, A. G. (2002). Robust block decomposition sliding mode control design. Mathematical Problems in Engineering, 349–365.
- Morfin, O. A., Castañeda, C. E., Valderrabano-Gonzalez, A., Hernández-Gonzalez, M., y Valenzuela, F. A. (2017). A real-time SOSM super-twisting technique for a compound DC motor controller. Energies MDPI, 1-19.

Morfin, O. A., Ruiz-Cruz, R., Hernández, J. I., Castañeda, C. E., Ramirez-Betancour, R., y Valenzuela-Murillo, F. A. (2021). Real-time sensorless robust velocity controller applied to a DC-motor for emulating a wind turbine. *Energies MDI*, 2-15.

Ogata, K. (2010). *Ingeniería de Control Moderna*. Minnesota: Prentice Hall.

Sen, P. (2014). *Principles of electric machines and power electronics*. United States: John Wiley and Sons.