

Soluciones axial simétricas estáticas de sistemas binarios en 5D Static axisymmetric solutions of binary systems in 5D

V. E. Cerón-Ángeles ^{a,*}, L. A. López-Suarez ^a, O. Pedraza-Ortega ^a, I. Cabrera-Munguía ^b

^aÁrea Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.

^bDepartamento de Física y Matemáticas, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, 32310 Ciudad Juárez, Chihuahua, México.

Resumen

Usando una solución estática axial simétrica que describe un sistema binario de agujeros negros idénticos en un espacio-tiempo en cuatro dimensiones (4D), construimos y estudiamos a través de la estructura de barras, una solución en cinco dimensiones (5D), que contiene tres parámetros libres y es una solución de vacío para las ecuaciones de Einstein con tres vectores de Killing que conmutan. Dependiendo del valor de los parámetros, la solución 5D representa dos agujeros negros estáticos o un agujero negro estático en 5D. Además, presentamos una solución novedosa que representa dos agujeros negros idénticos en 5D por medio de la solución de Schwarzschild.

Palabras Clave:

Soluciones exactas, Agujeros negros, Estructura de barras, Dimensiones extra, Simetrías.

Abstract

Using a static axisymmetric solution that describes a binary system of identical black holes in a space-time in four dimensions (4D), we construct and study through the rods structure, a solution in five dimensions (5D), that containing three free parameters and is a vacuum solution to Einstein equations with three commuting Killing vector. Depending on the parameters' value, the 5D solution represents two static black holes or one static black hole in 5D. Also, we present a novel solution that represents two identical black holes in 5D through the Schwarzschild solution.

Keywords:

Exact Solutions, Black holes, Rods structure, Extra dimensions, Symmetries.

1. Introducción

El sistema de dos cuerpos es uno de los problemas más estudiados en relatividad general. Como un caso particular de este, tenemos un sistema binario de agujeros negros alineados de Schwarzschild, el cual se describe muy fácil en coordenadas de Weyl usando la conocida solución doble de Schwarzschild, (Bach and Weyl (1922); Araújo and Oliveira (1995)). Para sistemas rotantes, diversos autores han encontrado soluciones a sistemas binarios contrarotantes de agujeros negros de Kerr separados por una región puntual sin masa (singularidad cónica) (V. S. Manko and Sadovnikov (2008); Herdeiro and Rebelo (2008)), a través del formalismo de Ernst. Además, con la ayuda del método de (Sibgatullin (1991); Ruiz et al. (1995)), se

ha desarrollado una solución binaria exacta con cuatro parámetros para agujeros negros contrarotantes de Kerr-Newman con cargas eléctrica y magnética opuestas (Cabrera-Munguía et al. (2013)). En el contexto de cinco dimensiones, usando como base la correspondiente solución doble de Kerr en 5D y la teoría de Einstein-Maxwell-Kalb-Ramond, proporciona nuevas soluciones cargadas y pueden ser derivadas después de aplicar la llamada transformación de normalización de Harrison (Becerril and Herrera-Aguilar (2005)).

Por otro lado, al resolver las ecuaciones de Einstein, generalmente se impone algún tipo de simetría. Sin embargo, en cuatro dimensiones, cuando el espacio-tiempo no depende más que de dos variables conocidas, las soluciones obtenidas son llamadas soluciones tipo G_2 . Existen en la literatura decenas de

*Autor para correspondencia: vceron@uaeh.edu.mx

Correo electrónico: vceron@uaeh.edu.mx (Victoria Elizabeth Cerón-Ángeles), lalopez@uaeh.edu.mx (Luis Alberto López-Suarez), omarp@uaeh.edu.mx (Omar Pedraza-Ortega), icabreramunguia@gmail.com (Ivan Cabrera-Munguía).

técnicas para la construcción de soluciones exactas de complejidad cada vez mayor a partir de soluciones más simples. Esto se debe principalmente a su generalidad y aplicabilidad, las soluciones G_2 proporcionan un punto de partida adecuado para construir nuevas soluciones.

Para obtener soluciones en cinco dimensiones existe un método estándar que consiste en agregar un campo escalar a la solución G_2 , cuatro-dimensional y elevarla así a cinco dimensiones $5D$ (Feinstein and Vazquez-Mozo (2000); Breton et al. (2008)). Por lo tanto, es interesante generar soluciones $5D$ que representen sistemas binarios de dos agujeros negros y estudiar su respectiva estructura de barras. En la forma canónica (coordenadas de Weyl) una solución con simetría axial y estacionaria de las ecuaciones de Einstein en el vacío, se puede generalizar usando una estructura de barras que constituyen la fuente para una solución. Con la estructura de barras es posible determinar si la solución representa a un agujero negro o a un sistema binario.

En este artículo, se obtiene una nueva solución con simetría axial en $5D$ con tres parámetros libres, partiendo de una solución con simetría axial y estática en $4D$ de dos agujeros negros y añadiendo un campo escalar. El esquema del documento es el siguiente. En la sección 2, se presenta una solución $4D$ que representa dos agujeros negros. Más adelante, se presenta el formalismo de la estructura de la barras de soluciones tipo G_{D-2} en la sección 3. En la sección 4, se obtiene una solución $5D$ mediante el uso de la solución $4D$ descrita en la sección 2. La sección 5 está dedicada a estudiar las posibles interpretaciones de la solución $5D$ y que dependen de los valores del parámetro asociado al campo escalar. En la sección 6, presentamos una solución que representa dos agujeros negros idénticos en $5D$ a través de la solución de Schwarzschild $4D$. En 7 se muestra como obtener información de los horizontes de las soluciones obtenidas. Finalmente se exponen las conclusiones más relevantes.

2. Agujeros negros en 4D

La solución $4D$ que consideramos, corresponde a una solución con simetría axial y estática que representa dos agujeros negros en coordenadas de Weyl (Araújo and Oliveira (1995)):

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{-2\psi} [e^{2\nu} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2], \quad (1)$$

donde $\psi = \psi_1 + \psi_2$, $\nu = \nu[\psi_1] + \nu[\psi_2] + 2\nu[\psi_1, \psi_2]$ y esta dado por:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{R_+ + R_- - 2m}{R_+ + R_- + 2m} \right] \\ \psi_2 &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{R'_+ + R'_- - 2m}{R'_+ + R'_- + 2m} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \nu[\psi_1] &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(R_+ + R_-)^2 - 4m^2}{4R_+ R_-} \right] \\ \nu[\psi_2] &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(R'_+ + R'_-)^2 - 4m^2}{4R'_+ R'_-} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \nu[\psi_1, \psi_2] &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(m+z_0)R_+ + (2m+z_0)R_- - mR'_-}{z_0 R_+ + (m+z_0)R_- - mR'_+} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \ln \left[\frac{z_0}{z_0 + m} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

y

$$R_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + (z \mp m)^2} \quad R'_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + (z + 2(z_0 + m) \mp m)^2}. \quad (5)$$

La solución (1) se interpreta como dos fuentes newtonianas de longitudes $2m$ y densidad $\frac{1}{2}$, ubicadas en el eje z y centradas en $z = 0$ (para ψ_1) y $z = -2(m + z_0)$ (para ψ_2). El potencial newtoniano de esta configuración es una solución de la ecuación de Laplace, donde $\nu[\psi_1, \psi_2]$ es el término de interacción.

Cuando $\rho = 0$, el término de interacción no desaparece, entonces este término genera una singularidad cónica que puede interpretarse como una región sin masa que mantiene separados los dos agujeros negros. La región aparece en el plano ortogonal al eje z , generando una tensión F_z entre los dos agujeros negros y se puede calcular mediante el tensor de momento de energía (Bach and Weyl (1922)).

$$F_z = \frac{m^2}{d^2 - (2m)^2}, \quad (6)$$

donde $d = 2z_0 - 2m$ es la distancia desde el centro de los agujeros negros.

3. Estructura de barras

Como fué mostrado por (Harmark (2004)), una solución con simetría axial y estacionaria contiene cierta estructura, llamada estructura de barras. En este espacio plano tridimensional, las fuentes para una métrica consisten de barras delgadas a lo largo de cierto eje espacial. Para cada una de estas barras, se podría asociar una dirección en el espacio vectorial dos dimensional en el que se extienden los campos vectoriales de Killing. El análisis de soluciones con simetría axial y estacionarias en términos de la estructura de barras, se puede hallar en (Empan and Reall (2002)) para métricas de Weyl.

La solución general con simetría axial y estática de las ecuaciones de Einstein en el vacío en coordenadas de Weyl y vectores de Killing en $D - 2$ dimensiones (Harmark (2004); Empan and Reall (2002)) viene dado por,

$$ds^2 = e^{2\sigma} (d\rho^2 + dz^2) + \sum_{i,j=1}^{D-2} G_{ij} dx^i dx^j, \quad (7)$$

donde G_{ij} y σ son funciones solo de ρ, z y $\det G_{ij} = \rho^2$ (para una notación compacta $G_{ij} = G$). La ecuación (7) es no regular en $\rho \rightarrow 0$, debido al hecho de que en dicho límite G^{-1} no existe. La razón principal es que hay fuentes en $\rho = 0$. La caracterización de G nos permite determinar la estructura del sistema. Cuando se analiza el comportamiento de $G(\rho, z)$ cerca de $\rho = 0$, se descubre que el eje z se divide en intervalos denominados barras, de acuerdo con la dimensión del Kernel de G ($\dim \text{Ker} G \not\geq 1$) en $\rho = 0$. Es decir existen en puntos aislados denotados como $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$ con $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_N$ donde $\dim \text{Ker} G(0, z) \geq 1$.

Por lo que el eje z es dividido en intervalos $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_N, \infty)$ conocidos como $N + 1$ intervalos o barras de la solución. Si $\nu_k \neq 0$, es decir, $\nu_k \in \text{Ker}[G(0, z)]$, se le llama a ν_k la dirección de la correspondiente barra (a_{k-1}, a_k) .

Después de analizar la estructura de barras de la solución (1), obtenemos que la dirección tipo espacial (∂_ϕ o ϕ) contiene dos barras semi-infinitas localizadas en $(-\infty, -(3m + 2z_0))$ y (m, ∞) , respectivamente y una más en $(-(2z_0 + m), -m)$. Además la dirección tipo temporal (∂_t o t) tiene dos barras finitas en $(-(3m + 2z_0), -(2z_0 + m))$ y $(m, -m)$ (las barras tienen un espesor despreciables y masa $\frac{1}{2}$ por unidad de longitud), como se muestra en la figura (1) y que concuerda con la interpretación de la solución (1), respecto a que describe un sistema de dos agujeros negros idénticos, por tener barras finitas en la dirección t .

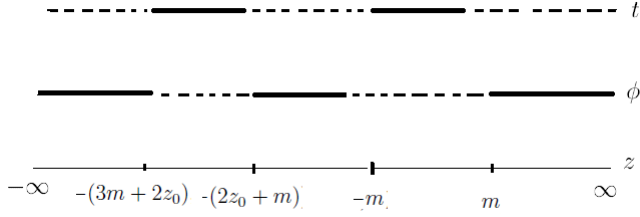


Figura 1: La estructura de las barras en 4D con simetría axial simétrica y estática.

4. Agujeros negros en 5D

En esta sección derivaremos una solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío en cinco dimensiones, partiendo de una solución en 4D. Usaremos el algoritmo generado en (Feinstein and Vazquez-Mozo (2000)), haciendo una generalización para el caso de cinco-dimensiones. Supongamos que tenemos una solución en el vacío para las ecuaciones de campo de Einstein en cuatro dimensiones (la métrica (1)) y le añadimos un campo escalar φ . Para este caso especial escogemos φ como sigue:

$$\varphi = \frac{A}{2} \ln \left[\frac{R'_+ + R'_- - 2m}{R'_+ + R'_- + 2m} \right], \quad (8)$$

donde φ es una solución de las ecuaciones de Laplace $\varphi_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\varphi_{,\rho} + \varphi_{,zz} = 0$, y A es constante.

Entonces, la correspondiente solución (1) con campo escalar es de la forma

$$ds_{sc}^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{-2\psi} [e^{2(\nu+\nu_{sc})} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2], \quad (9)$$

donde ν_{sc} esta dada por

$$\nu_{sc,\rho} = \rho(\varphi_{,\rho}^2 - \varphi_{,z}^2) \quad (10)$$

$$\nu_{sc,z} = 2\rho\varphi_{,\rho}\varphi_{,z} \quad (11)$$

considerando (8) obtenemos;

$$\nu_{sc} = \frac{A^2}{2} \ln \left[\frac{(R'_+ + R'_-)^2 - 4m^2}{4R'_+R'_-} \right], \quad (12)$$

Por tanto obtenemos la solución (13) en cinco dimensiones;

$$ds_5^2 = e^{-\frac{2\varphi}{\sqrt{3}}} (ds_{sc}^2) + e^{\frac{4\varphi}{\sqrt{3}}} d\omega^2. \quad (13)$$

que se puede asociar a un caso particular de la teoría de Kaluza-Klein llamado Brans-Dicke. La teoría de Kaluza-Klein toma al espacio-tiempo $M^4 \times S^1$, formado por espacio de Minkowski 4D y el círculo S^1 . La acción de Kaluza-Klein en 5D es dada por

$$S_5 = \frac{1}{16\pi G_5} \int d^4x d\omega \sqrt{-g_5} R_5. \quad (14)$$

Esta variedad, es solución a las ecuaciones de Einstein en 5D, cuya métrica puede parametrizarse de la siguiente forma:

$$g_{AB} = \frac{1}{\Phi^{1/3}} \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu & A_\mu \Phi \\ A_\nu \Phi & \Phi \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Donde A_μ es un potencial electromagnético y Φ un campo escalar (para nuestro caso asociado a φ). La topología de la variedad, permite desarrollar en series de Fourier a la quinta coordenada. Así tenemos

$$\Phi(x^\mu, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n(x^\mu) e^{in\omega}. \quad (16)$$

El desarrollo es análogo para $g_{\mu\nu}$ y A_μ . Considerando $A_\mu = 0$ (caso Brans-Dicke) y reteniendo el modo cero ($n = 0$) de los desarrollos y realizando la integración en la quinta coordenada, se logra una reducción dimensional consistente para (13). Retomando nuestro desarrollo, explícitamente (13) se escribe como

$$ds_5^2 = -e^{2\tilde{\psi}} dt^2 + e^{-2\tilde{\psi}} [e^{2\tilde{\nu}} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] + e^{\frac{4\varphi}{\sqrt{3}}} d\omega^2, \quad (17)$$

donde $\tilde{\psi} = \psi_1 + \tilde{\psi}_2$, $\tilde{\nu} = \nu[\psi_1] + \nu[\tilde{\psi}_2] + 2\nu[\psi_1, \psi_2]$ con $\tilde{\psi}_2 = \psi_2 - \frac{2\varphi}{\sqrt{3}}$;

$$\tilde{\psi}_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{A}{\sqrt{3}} \right) \ln \left[\frac{R'_+ + R'_- - 2m}{R'_+ + R'_- + 2m} \right], \quad (18)$$

$$\nu[\tilde{\psi}_2] = \left(\frac{1}{2} + \frac{A^2}{2} \right) \ln \left[\frac{(R'_+ + R'_-)^2 - 4m^2}{4R'_+R'_-} \right]. \quad (19)$$

La ecuación (17) representa una solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío en cinco dimensiones con tres parámetros libres (z_0 , m y A) y con tres vectores de Killing que conmutan. Como fué discutido en (Breton et al. (2008)), la elección correcta de los valores del parámetro A es muy importante, ya que nos permitirá determinar nuevas soluciones representativas de uno o dos agujeros negros como veremos en la siguiente sección.

Es posible realizar una interpretación de la solución (17), considerando las coordenadas tipo Schwarzschild (r, θ) , y de las relaciones

$$\rho^2 = (r^2 - 2mr) \sin^2 \theta \quad z = (r - m) \cos \theta, \quad (20)$$

obtenemos que,

$$ds_5^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) e^{2\tilde{\psi}_2(r,\theta)} dt^2 + e^{2\tilde{\psi}_2(r,\theta)} r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + e^{\frac{4\varphi}{\sqrt{3}}} d\omega^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} e^{-2\tilde{\psi}_2(r,\theta)} \rho^2 e^{2\nu[\tilde{\psi}_2(r,\theta)]} \times e^{2\nu[\psi_1(r,\theta), \psi_2(r,\theta)]} (dr^2 + r^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right) d\theta^2), \quad (21)$$

si tomamos en cuenta el siguiente límite $r \rightarrow \infty$, el elemento de línea (21) toma la forma,

$$ds_5^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2 + d\omega^2. \quad (22)$$

Observe que la métrica es asintóticamente plana y singular en $r = 0$. En el caso $z_0 \rightarrow \infty$ la solución en $5D$ (21) corresponde a una cuerda negra (Gregory and Laflamme (1988)),

$$ds_5^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + d\omega^2 \quad (23)$$

La cuerda negra es un agujero negro hipercilíndrico $S^2 \times \mathfrak{R}$ (un agujero negro tipo Schwarzschild con una dimensión plana extra en $4D$).

5. Estructura de barras de un agujero negro en $5D$

Las soluciones que representan agujeros negros deben tener barras finitas en la dirección temporal, porque las barras finitas en la coordenada temporal corresponden a horizontes de eventos en el espacio-tiempo, así como barras semi-infinitas corresponden a horizontes acelerados (Empanan and Reall (2002)); también las soluciones deben ser asintóticamente planas. Del análisis de la estructura de barras de la solución (17) se obtiene que dicha solución puede representar uno o dos agujeros negros, dependiendo del valor de A , como veremos a continuación.

- $\frac{1}{2} - \frac{A}{\sqrt{3}} > 0$.

En este caso en la dirección tipo espacial (∂_ϕ o ϕ) tiene dos barras semi-infinitas en los rangos $(-\infty, -(3m + 2z_0))$ y (m, ∞) , respectivamente. Una barra finita en $(-(2z_0 + m), -m)$ y otra barra finita en $(-(3m + 2z_0), -(2z_0 + m))$ con densidad negativa $-\frac{A}{\sqrt{3}}$. Además, la barra $(-(3m + 2z_0), -(2z_0 + m))$ con densidad $\frac{1}{2} - \frac{A}{\sqrt{3}}$ se encuentra en la dirección ∂_ω (o ω). La dirección temporal contiene una barra finita en $(m, -m)$ con densidad $1/2$ y otra barra en $(-(3m + 2z_0), -(2z_0 + m))$ con densidad $\frac{1}{2} - \frac{A}{\sqrt{3}}$ como se muestra en la figura (2).

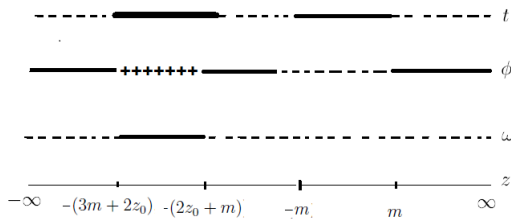


Figura 2: Estructura de barras en $5D$ para una solución con simetría axial con $\frac{1}{2} - \frac{A}{\sqrt{3}} > 0$.

Por tanto, la solución (17) representa dos agujeros negros en cinco dimensiones, con densidades diferentes, la densidad de la barra en la dirección tipo temporal es la misma que la densidad del agujero negro de (Empanan and Reall (2002)).

- $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

De la estructura de barras de la figura (3) observamos que la dirección tipo espacial (∂_ϕ) incluye dos barras semi-infinitas en $(-\infty, -(3m + 2z_0))$, (m, ∞) . Una barra finita $(-(2z_0 + m), -m)$ y otra barra finita en $(-(3m + 2z_0), -(2z_0 + m))$ con densidad negativa $-\frac{A}{\sqrt{3}}$, la dirección tipo espacial (ω) tiene una barra finita en $(-(3m + 2z_0), -(2z_0 + m))$. La dirección tipo temporal (∂_t o t) contiene una barra finita $(m, -m)$.

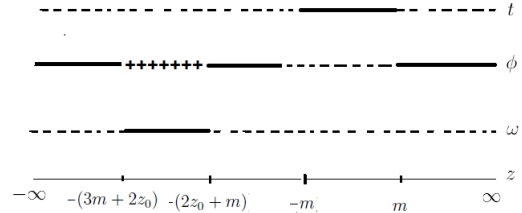


Figura 3: Estructura de barras en $5D$ para una solución con simetría axial y estática con $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Así, la solución representa un agujero negro en cinco dimensiones. La estructura de barras (3) es similar a la estructura de barras de un agujero negro de burbuja tipo KK (Empanan and Reall (2002)) en las direcciones ∂_t y ∂_ω .

- $\frac{1}{2} - \frac{A}{\sqrt{3}} < 0$

En este caso, la dirección tipo espacial (∂_ϕ) tiene dos barras semi-infinitas en $(-\infty, -(3m + 2z_0))$, (m, ∞) , una finita en $(-(2z_0 + m), -m)$ y otra finita en $(-(3m + 2z_0), -(2z_0 + m))$ con densidad negativa $-\frac{A}{\sqrt{3}}$. Además, en la dirección tipo espacial (∂_ω) hay una barra finita $(-(3m + 2z_0), -(2z_0 + m))$. La dirección tipo temporal tiene una barra finita $(m, -m)$ y otra finita $(-(3m + 2z_0), -(2z_0 + m))$ con densidad negativa como se muestra en la figura (4)

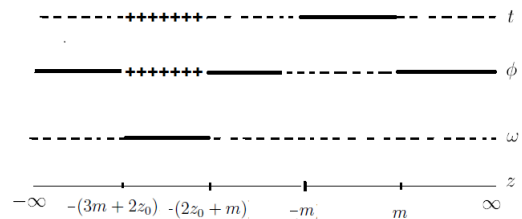


Figura 4: Estructura de barras en $5D$ para una solución con simetría axial y estática con $\frac{1}{2} - \frac{A}{\sqrt{3}} < 0$.

Soluciones en $5D$ con barras de densidad negativa son soluciones tipo agujero negro, las cuales fueron ampliamente estudiadas en Ref. (Breton et al. (2008)).

Para concluir, debemos mencionar que soluciones en $5D$ (17 ó 21) representan una solución de dos agujeros negros o un agujero negro estático respectivamente, dependiendo del valor de A .

6. Dos agujeros negros idénticos en 5D

Dado que se ha obtenido una solución en 5D que puede representar dos agujeros negros no idénticos con tres parámetros libres. Ahora vamos a considerar la solución de Schwarzschild 4D con el propósito de aplicar las ideas de la sección 4 en coordenadas de Weyl y obtener una nueva solución en 5D que represente dos agujeros negros idénticos.

La solución de Schwarzschild es en coordenadas de Weyl:

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{-2\psi} [e^{-2\nu} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] \quad (24)$$

donde

$$\psi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_+ + r_- - 2m}{r_+ + r_- + 2m} \right) \quad \nu = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(r_+ + r_-)^2 - 4m^2}{4r_+ r_-} \right) \quad (25)$$

con $r_{\pm}^2 = \rho^2 + (z \pm m)^2$. La estructura de barras de la solución (24) tiene en la dirección tipo espacial (∂_ϕ) dos barras semi-infinitas en $(-\infty, -m)$, (m, ∞) con densidad $\frac{1}{2}$ y una barra finita en $(-m, m)$ con densidad $\frac{1}{2}$ en la dirección tipo temporal (∂_t) como se muestra en la figura (5), cabe recordar que la solución de Schwarzschild representa un agujero negro estático de masa m .

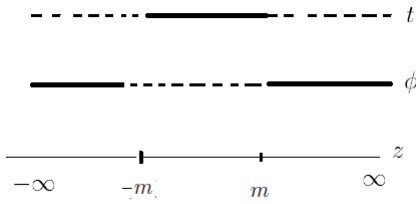


Figura 5: La estructura de barras para la solución de Schwarzschild.

Ahora el campo escalar que se añade a la solución (24) es;

$$\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left(\frac{q_+ + q_- - 2a}{q_+ + q_- + 2a} \right) \quad q_{\pm}^2 = \rho^2 + (z \pm a)^2 \quad (26)$$

En este caso, la solución (24) toma la forma dada por la ecuación (9) (Schwarzschild con campo escalar), donde v_{scalar} esta definido como

$$v_{scalar} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(q_+ + q_-)^2 - 4a^2}{4q_+ q_-} \right)^3. \quad (27)$$

La solución de Schwarzschild con campo escalar es ahora una solución en 5D (17), con dos parámetros libres (a y m) y asintóticamente plana. Después de analizar la estructura de barras se puede obtener que en la dirección tipo temporal (∂_t) tiene dos barras finitas en $(-m, -a)$ y (a, m) con densidad $\frac{1}{2}$. Por otro lado, la dirección tipo espacial (∂_ϕ) tiene dos barras semi-infinitas en $(-\infty, -m)$ y (m, ∞) con densidad $\frac{1}{2}$ y otra finita $(-a, a)$ con densidad negativa. Por último, en la dirección tipo espacial (∂_ω) existe una barra finita en el rango $(-a, a)$, como se muestra en la figura (6). En consecuencia, la solución en 5D obtenida de la solución de Schwarzschild más un campo escalar, representa una solución novedosa que describe dos agujeros negros en 5D idénticos.

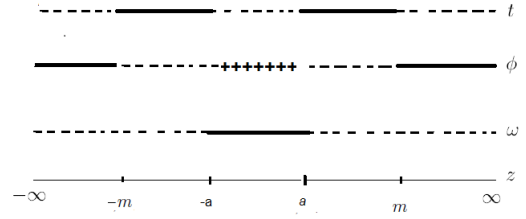


Figura 6: Estructura de barras de dos agujeros negros idénticos en 5D.

Vale la pena mencionar que la estructura de barras obtenida y representada en la figura (6) es similar a la estructura de barras que describe dos agujeros negros en el polo norte y sur de burbuja tipo KK (Empanan and Reall (2002)). Sin embargo, si los dos agujeros negros se fusionan, la solución no se reduce a un solo agujero negro más grande, sino a una cuerda negra. Pero este caso sólo aparece si se agrega una barra de la misma longitud y menor densidad (Lopez et al. (2010)), mostrando así la diferencia entre ambas soluciones.

7. Horizontes

En 5D no es fácil descifrar las características topológicas del espacio-tiempo, para obtener información se necesitan objetos invariantes. En 1965 Penrose introduce en Relatividad General el concepto de *superficie cerrada atrapada*, que fue crucial para el desarrollo de teoremas de singularidad y estudios de colapso gravitacional, agujeros negros y horizontes de varios tipos.

Las superficies atrapadas (cerradas o no) son superficies espaciales D -dimensionales, tal que cualquier porción de ellas tiene una área decreciente a lo largo de cualquier dirección de evolución futura.

A fin de caracterizar las soluciones encontradas, es posible definir un escalar que determina si existen horizontes, singularidades o superficies atrapadas (ver Senovilla (2002)).

Para nuestro caso particular, se considera una familia de superficies S_{x^a} espacialoides 3D ($S_\mu S^\mu > 0$) con coordenadas intrínsecas x^a , dentro de un espacio-tiempo 5D. Esta familia de superficies pueden ser descrita por coordenadas locales $\{x^A\} = \{\theta, \phi, \omega\}$ y fijando las coordenadas $\{x^a\} = \{t, \rho\}$. El elemento de línea (13) puede ser escrito de la forma;

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b + g_{AB} dx^A dx^B, \quad (28)$$

Definiendo a $\sqrt{\det g_{AB}} \equiv e^U$, e introduciendo también la curvatura de la uno-forma $H_\mu = \delta_\mu^a U_{,a}$ entonces se puede construir el escalar:

$$\kappa_{\{x^a\}} = -g^{ab} H_a H_b |_{S_{x^a}}. \quad (29)$$

Si la superficie es atrapada o no, depende de que el invariante κ sea positivo o negativo. La superficie o superficies H definidas localmente al hacer cero el invariante κ son conocidas como S_{x^a} - *horizonte*, en algunos casos estos coinciden con los horizontes clásicos, en forma general para (13) se obtiene;

$$U = \ln \rho + \nu + v_{sc} - 2\psi,$$

$$\kappa_{\{t,\rho\}} = -g^{\rho\rho} U_{,\rho}^2. \quad (30)$$

Para visualizar los horizontes que se obtienen al generar soluciones $5D$, se consideran coordenadas tipo Schwarzschild (r, θ) (20), obteniendo por ejemplo para el caso de un solo agujero negro (caso $A = \sqrt{3}/2$).

$$\kappa_{\{r,t\}} \propto -(r - 2m)[2r + 4m(\cos \theta - 1)] \frac{1}{r}. \quad (31)$$

El horizonte ($\kappa_{\{r,t\}} = 0$) corresponde a una esfera tres dimensional centrada en el origen de radio $r = 2m$, incluyendo un nuevo horizonte $r = 2m(1 - \cos \theta)$ y este horizonte deforma la tres esfera. También presenta una singularidad en $r = 0$. En el caso de soluciones que representen dos agujeros negros, se espera obtener dos esferas deformadas por cada barra situadas en dichas posiciones.

8. Conclusiones

En este trabajo se obtuvo una solución con simetría axial y estática de las ecuaciones de Einstein en vacío en cinco dimensiones, con tres parámetros libres mediante una solución semilla estática axial simétrica que describe dos agujeros negros que interactúan en $4D$ y un al campo escalar. Al realizar el análisis de la estructura de barras de la nueva solución $5D$ es posible determinar que dependiendo del valor del parámetro asociado al campo escalar agregado, la solución $5D$ puede representar un sistema binario de dos agujeros negros con diferentes densidades o un agujero negro.

También es posible mencionar que la solución de $5D$ obtenida de la solución semilla de Schwarzschild dotada de un campo escalar representa una solución de dos agujeros negros idénticos en $5D$. En algunos casos, las estructuras de barras son similares a la estructura de barras de soluciones ya conocidas. Finalmente se hace un breve análisis de las posibles topologías de los horizontes.

La intención de mostrar la aplicación del análisis de la estructura de barras, es dar a conocer métodos alternativos para interpretar este tipo de soluciones, y con ello tener más herramientas para estudiar y caracterizar soluciones axiales simétricas de las ecuaciones de Einstein en el vacío en $4D$ o $5D$.

Referencias

- Araújo, M. E. and Oliveira, S. R. (1995). Static axisymmetric approach for the head-on collision of two black holes. *Phys. Rev. D*, 52:816.
- Bach, R. and Weyl, H. (1922). Neue lösungen der einsteinschen gravitationsgleichungen. *Math. Z.*, 1:134.
- Becerril, R. and Herrera-Aguilar, A. (2005). Charging a double kerr solution in 5d einstein-kalb-ramond theory. *J. Math. Phys.*, 46:052503.
- Breton, N., Feinstein, A., and Lopez, L. A. (2008). Generating Generalized G(D-2) solutions. *Phys. Rev. D*, 77:124021.
- Cabrera-Munguia, I., Lämmerzahl, C., López, L. A., and Macías, A. (2013). Opposite charged two-body system of identical counterrotating black holes. *Phys. Rev. D*, 88:8.
- Emparan, R. and Reall, H. S. (2002). Generalized Weyl solutions. *Phys. Rev. D*, 65:084025.
- Feinstein, A. and Vazquez-Mozo, M. A. (2000). M theory resolution of four-dimensional cosmological singularities. *Nucl. Phys. B*, 568:405.
- Gregory, R. and Laflamme, R. (1988). Hypercylindrical black holes. *Phys. Rev. D*, 37:305.
- Harmark, T. (2004). Stationary and axisymmetric solutions of higher-dimensional general relativity. *Phys. Rev. D*, 70:124002.
- Herdeiro, C. A. R. and Rebelo, C. (2008). On the interaction between two kerr black holes. *JHEP*, 10:017.
- Lopez, L. A., Feinstein, A., and Breton, N. (2010). Generating Black Strings in Higher Dimensions. *Mod. Phys. Lett. A*, 25:815.
- Ruiz, E., Manko, V. S., and Martin, J. (1995). Extended N soliton of the Einstein-Maxwell equations. *Phys. Rev. D*, 51:4192.
- Senovilla, J. M. M. (2002). Trapped surfaces, horizons, and exact solutions in higher dimensions. *Class. Quant. Grav.*, 19:L113.
- Sibgatullin, N. R. (1991). Oscillations and waves in strong gravitational and electromagnetic fields.
- V. S. Manko, E. D. Rodchenko, E. R. and Sadovnikov, B. I. (2008). Exact solutions for a system of two counter-rotating black holes. *Phys. Rev. D*, 78:124014.