© Academia Journals 2021

Obtención de Intervalos de Confianza para Eigenvalores de un Proceso de Inyección de Plástico

Luis Gerardo Davila Vargas[1], Dr. Luis Alberto Rodríguez Picón[2],
Dr. Luis Carlos Méndez González [3] y Dr. Roberto Romero López [4]

***Resumen*—** La metodología de superficie de respuesta es una herramienta importante para la optimización de procesos de diversas naturalezas. En la literatura se han encontrado diferentes aplicaciones que abarcan diversas áreas del conocimiento. El objetivo final de la metodología consiste en determinar condiciones óptimas de factores controlables con la intención de encontrar el desempeño óptimo de una variable de respuesta. Uno de los métodos utilizados dentro de esta metodología es el análisis canónico, que permite determinar el punto estacionario del modelo ajustado. Precisamente, el punto estacionario puede proporcionar una condición óptima del proceso bajo estudio. Sin embargo, la condición óptima se establece a partir de los eigenvalores del análisis, los cuales se ven afectados por error muestral. De esta manera, resulta necesario determinar intervalos de confianza para estos valores con el fin de encontrar de manera precisa el valor de los eigenvalores calculados. En el presente artículo se ilustra la obtención de los intervalos de confianza para los eigenvalores estimados a partir de un caso de estudio relacionado con un proceso de moldeo por inyección

***Palabras clave*—** Metodología de superficie de respuesta, Análisis canónico, Moldeo por inyección, Modelo de segundo orden.

Introducción

El análisis estadístico es la ciencia de recaudación, explorar y presentar grandes cantidades de datos para poder descubrir tendencias y patrones complicados de entender. (Hernandez Martin, 2012) Existen muchos métodos de análisis estadísticos el cual se utilizan para la obtención, representación, interpretación y proyección de las características de un estudio o de un proyecto de investigación para poder realizar una mejor compresión de la realidad y optimización en la toma de decisiones. Esto se convierte en las herramientas esenciales en la investigación, en este caso utilizaremos lo que es el análisis el cual es un método de multivariante, su objetivo es buscar las relaciones entre variantes dependientes para poder maximizar o minimizar el proceso investigado. Esto nos lleva a poder utilizar las herramientas estadísticas para nuestra investigación que es encontrar una superficie de respuesta en una máquina de inyección de plásticos mediante sus variantes dependientes que conforman su función. Así encontrar el punto estacionario que logra encontrar con los eigenvalores del análisis, de esta manera tendríamos intervalos de confianza para determinar de manera precisa los eigenvalores calculados. (Carlson, 2005)

Un análisis canónico puede mostrar, a partir de un modelo de segundo orden, puntos estacionarios los cuales pueden ser un punto máximo, un punto mínimo o un punto silla. Algunas veces es muy complicado comprender la superficie mediante métodos de expresión algebraica, considerando que se pueden tener muchas variables de respuesta independientes en el modelo. (Chih-Cherng, Pao-Lin, & Yan-Cherng, 2009) Por lo cual el análisis canónico facilita la interpretación de los resultados en puntos denominados máximo, mínimo y punto silla, donde presentarlos geométricamente de manera directa no es posible. Un modelo canónico puede conducir a nuevos descubrimientos, tomando como base modelos cuadráticos, así como la matriz de coeficientes la cual es una matriz simétrica en la superficie de respuesta cuyos elementos de las diagonales está construida de los coeficientes cuadráticos del modelo.

Los eigenvalores determinan el tipo de punto estacionario, mínimo, máximo o punto silla dependiendo de los signos de los eigenvalores. Entonces si se calcula un eigenvalor negativo y positivo te puede ayudar a definir un punto estacionario, la cuestión del intervalo es considerar el error del muestreo dado que el intervalo puede considerar valores que cambian el signo del eigenvalor y eso nos puede cambiar el punto estacionario establecido. (Bisgaard & Ankenman, 1996).

[1] Luis Gerardo Davila Vargas es Estudiante próximo para egresar de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Chihuahua. Al159404@alumnos.uacj.mx **(autor corresponsal)**
[2] Dr. Luis Alberto Rodríguez Picón es Profesor Investigador de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Chihuahua. luis.picon@uacj.mx
[3] Dr. Luis Carlos Méndez González es Profesor Investigador de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Chihuahua. luis.mendez@uacj.mx
[4] Dr. Roberto Romero López es Profesor Investigador de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Chihuahua. rromero@uacj.mx

Descripción del Método

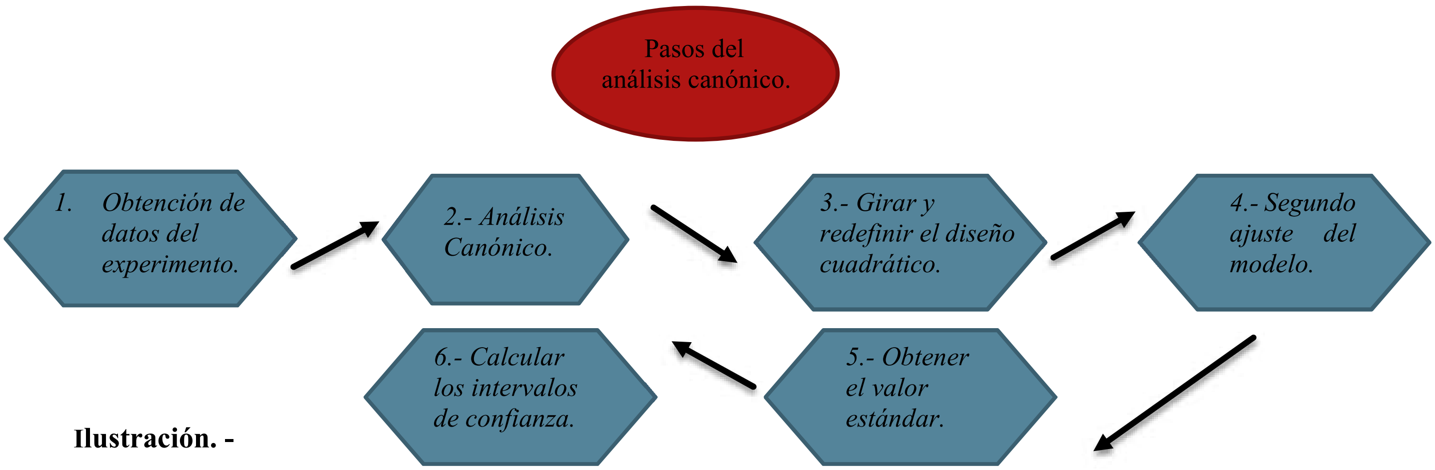

Ilustración. -

Paso1.- Obtención de datos de experimentación.
1.- Se tomarán los datos y se analizarán los datos del caso de Chih-Cherng Chen (2009) para obtener el modelo cuadrático.
Paso2.- Análisis canónico.
2.- Se usará el programa R estadístico respecto a las matrices de B y b para adquirir los eigenvalores de los coeficientes obtenidos.
Paso 3.- Girar y redefinir diseño cuadrático.
3.- Girar los vectores base a las coordenadas y redefinir el diseño en el nuevo sistema de coordenadas.
Paso 4.- Segundo ajuste del modelo.
4.- Ajustar una vez más el modelo de segundo orden utilizando la nueva matriz de diseño.
Paso 5.- *Obtener el error estándar.*
5.- obtener el error estándar proporcionado por una rutina de regresión lineal estándar.
Paso 6.- Calcular los intervalos de confianza.
6.- calcular los intervalos de confianza para los eigenvalores.

Resultados

1.- Los datos tomados del experimento de chen se analizaron en minitab, para lograr determinar la variación dimensional de la capa delgada, la cual se utilizó el método de superficie de respuesta para determinar cuál sería la dimensión de la capa delgada de la pieza moldeada, aquí se puede observar la tabla de los coeficientes de los valores del documento de chen.

Término	Coef	EE del coef.	Valor T	Valor p	FIV
Constante	0.44257	0.00554	79.84	0.000	
x1	-0.03233	0.00421	-7.69	0.000	1.00
x2	-0.05033	0.00421	-11.97	0.000	1.00
x3	0.02728	0.00421	6.49	0.000	1.00
x4	0.02739	0.00421	6.51	0.000	1.00
x1*x1	-0.0076	0.0111	-0.69	0.501	2.78
x2*x2	0.0054	0.0111	0.48	0.636	2.78
x3*x3	-0.0021	0.0111	-0.19	0.849	2.78
x4*x4	0.0019	0.0111	0.17	0.869	2.78
x1*x2	-0.01206	0.00446	-2.70	0.016	1.00
x1*x3	0.00381	0.00446	0.85	0.406	1.00
x1*x4	-0.00031	0.00446	-0.07	0.945	1.00
x2*x3	-0.00856	0.00446	-1.92	0.074	1.00
x2*x4	0.00881	0.00446	1.98	0.067	1.00
x3*x4	-0.00506	0.00446	-1.13	0.274	1.00

Cuadro 1: Resultados obtenidos en Minitab.

Paso 2.- Programa R
El programa R es una herramienta estadística y graficas que nos permite desarrollar métodos lineales tanto como ni lineales, por lo cual se nos facilitó utilizarlo para lograr obtener los siguientes eigen-valores de respuesta.

1.-1.195122e-02.

2.- -8.420099e-05.

3.- -4.083770e-03.

4.- -1.018325e-02.

```
#1.-Definición de la matriz B
B=matrix(c(-0.0076,-0.00603,0.001905,-0.000155,-0.00603,0.0054,-
0.00428,0.004405,0.001905,-0.00428,-0.0021,-0.00253,-0.000155,0.004405,-
0.00253,0.0019),nrow=4,ncol=4)
#2.-Definición de b
b=matrix(c(-0.03233,-0.05033,0.02728,0.02739),nrow=4,ncol=1)
#3.-Obtener la matriz inversa de B
B1=solve(B)
#4.-Encontrando el punto estacionario
xs=-0.5*(B1%*%b)
#5.-Calculando la respuesta en el punto estacionario
b0=0.44257
ys=b0+(0.5*t(xs)%*%b)
#6.-Encontrando los niveles naturales del punto estacionario
x1=(xs[1,1]*(20/2))+20
x2=(xs[2,1]*(20/2))+30
x3=(xs[3,1]*(30/2))+55
x4=(xs[4,1]*(20/2))+230
#7.-Determinar el tipo de punto estacionario
ei=eigen(B)
```

Cuadro 2.- El código en el programa R que se utilizó.

El código R que se muestra en el cuadro 2 el cual consta de diferentes líneas de código donde a continuación se describe: la matriz “B” y el vector “b” se consideró los coeficientes del cuadro. Estos elementos se consideran en la línea 4 para encontrar el punto estacionario. En la línea 5 se calcula la respuesta de predicción en el punto estacionario mientras que en la línea 6 se encuentran los niveles naturales del punto estacionario mientras en la última línea de código se encuentran los eigen-valores y eigen-vectores de la matriz “B” para determinar la naturaleza del punto estacionario.

Paso 3.- Girar y redefinir diseño cuadrático.
En el paso 3 se realizó el rediseño cuadrático con los datos que tenemos del experimento que se puede establecer como una matriz de 4 columnas y 30 renglones que se va a multiplicar por la matriz de los eigen-vectores que nos salió como resultado en el programa R que esa sería una matriz de 4 columnas y 4 renglones para redefinir el diseño.

0	0	0	0
1.8469528	-0.20202327	0.40992442	0.61637145
-0.2695652	-1.55616179	1.13794514	-0.45910339
0.4199648	0.96694948	0.82153022	-1.48785965
0.2695652	1.55616179	-1.13794514	0.45910339
0	0	0	0
0.7798365	0.38621084	-0.31777242	-0.37645311
1.2901078	-0.78374012	0.5024003	-1.21200961

0	0	0	0
-0.5828632	0.77624466	1.36459918	1.09342763
-0.2872798	0.97444494	-1.04546926	-1.36927767
-0.7798365	-0.38621084	0.31777242	0.37645311
0.2872798	-0.97444494	1.04546926	1.36927767
0.2784225	0.29085843	-0.04623794	0.91419053
-0.2784225	-0.29085843	0.04623794	-0.91419053
0	0	0	0
0	0	0	0
-0.4199648	-0.96694948	-0.82153022	1.48785965
-1.1397082	0.19452781	1.45707506	-0.73495343
-0.9768098	-1.54866633	-0.72905434	-0.34052141
0.9768098	1.54866633	0.72905434	0.34052141
-1.2901078	0.78374012	-0.5024003	1.21200961
0	0	0	0
1.1397082	-0.19452781	-1.45707506	0.73495343
0.3536223	-0.00374773	0.93349974	-0.05929099
-0.3536223	0.00374773	-0.93349974	0.05929099
-1.8469528	0.20202327	-0.40992442	-0.61637145
0.5828632	-0.77624466	-1.36459918	-1.09342763
-0.4350715	0.8753448	0.15956496	-0.13792502
0.4350715	-0.8753448	-0.15956496	0.13792502

Cuadro 3.- Matriz rediseñada sacada de la herramienta de Excel.

Paso 4.- Segundo ajuste del modelo.
Se colocó un modelo nuevo de regresión en el programa minitab con la matriz redefinida del paso anterior, así se sacó como resultado un análisis de varianza que se muestra en el cuadro 4. En el análisis de regresión nos muestra la ecuación requerida para sacar la incógnita que estamos buscando como se muestra en el cuadro 5.

Fuente	**GL**	**SC Ajust.**	**MC Ajust.**	**Valor F**	**Valor p**
Regresión	14	0.096928	0.006923	21.74	0.000
C1	1	0.014091	0.014091	44.25	0.000
C2	1	0.020695	0.020695	64.99	0.000
C3	1	0.004233	0.004233	13.29	0.002
C4	1	0.052297	0.052297	164.23	0.000
C1*C1	1	0.001208	0.001208	3.79	0.070
C2*C2	1	0.000000	0.000000	0.00	0.988
C3*C3	1	0.000061	0.000061	0.19	0.667
C4*C4	1	0.000411	0.000411	1.29	0.274
C1*C2	1	0.000000	0.000000	0.00	1.000
C1*C3	1	0.000000	0.000000	0.00	1.000
C1*C4	1	0.000000	0.000000	0.00	1.000
C2*C3	1	0.000000	0.000000	0.00	1.000
C2*C4	1	0.000000	0.000000	0.00	1.000
C3*C4	1	0.000000	0.000000	0.00	1.000

Error	15	0.004777	**0.000318**		
Falta de ajuste	10	0.004777	0.000478	*	*
Error puro	5	0.000000	0.000000		
Total	29	0.101705			

Cuadro 4.- Tabla del análisis de varianza para tomar el error.

$$Y = 0.44257 + 0.2798C1 + 0.03391C2 + 0.01533C3 - 0.05390C4 + 0.01191C1 * C1 - 0.00013C2 * C2 - 0.00413C3 * C3 - 0.01022C4 * C4 - 0.0000C1 * C2 + 0.0000C1 * C3 + 0.0000C1 * C4 - 0.00000C2 * C3 - 0.00000C2 * C4 + 0.00000C3 * C4$$

Paso 5.- Obtener el error estándar.
Para lograr el error estándar es necesario transponer la matriz que se rediseño, y multiplicar ya la matriz transpuesta por la matriz de rediseño, obtenemos una matriz 4x4 la colocamos para sacar la matriz inversa cómo se muestra en el cuadro 6.

0.055555556	1.22055E-09	3.11363E-09	1.87732E-09
1.22055E-09	0.055555556	-2.99885E-10	-2.87336E-10
3.11363E-09	-2.99885E-10	0.055555556	-2.69882E-10
1.87732E-09	-2.87336E-10	-2.69882E-10	0.055555555

Cuadro 6.- Matriz inversa

Sacamos los valores de la diagonal como se logra mostrar en el cuadro 6, la segunda columna del cuadro 6 se nota la multiplicación de los elementos de la diagonal por el error estimado de la tabla ANOVA del cuadro 4. En la columna 3 se calculó la raíz del valor resultante obtenido en la segunda columna. Se obtiene el cuantil estándar de la distribución de T de student considerando $t_{1-\frac{\alpha}{2},n-p}$, en donde α es el nivel de significancia, n el número de observaciones y p es el número de parámetros de la ecuación de regresión ajustada. En este caso se consideró un nivel de significancia de 0.05, el valor de T se muestra en la cuarta columna del cuadro 6. Por último, en la última columna se muestra el error estándar que resulta de la multiplicación de la tercera y cuarta columna.

Diagonal Mi	**(D. MI) (error)**	**Raíz**	**T**	**Error std.**
0.055555556	1.76667E-05	**0.004203173**	2.119905299	0.00891033
0.055555556	1.76667E-05	**0.004203173**	2.119905299	0.00891033
0.055555556	1.76667E-05	**0.004203173**	2.119905299	0.00891033
0.055555555	1.76667E-05	**0.004203173**	2.119905299	0.00891033

Cuadro 7.- Operaciones que se realizaron para tener el error estándar.

Paso 6.- Calcular los intervalos de confianza.
Los intervalos de confianza se logran obtener con los eigen-valores obtenidos del programa R que se tomó en cuenta en el paso 2, teniendo el error estándar del paso anterior. Para tener el límite inferior de cada eigen-valor es necesario realizar una resta, el eigen-valor 1 con el error estándar y así sucesivamente con los demás. Ahora para obtener el límite superior, se realiza sumando el eigen-valor con el error estándar así tenemos como resultado los intervalos de confianza del experimento.

	E1	**E2**	**E3**	**E4**
	0.01195122	-8.4201E-05	-0.00408377	-0.01018325
Lim. Inf.	0.00304089	-0.00899453	-0.0129941	-0.01909358
Lim sup.	0.02086155	0.00882613	0.00482656	-0.00127292

Cuadro 9.- Intervalos de confianza

© Academia Journals 2021

Comentarios Finales

Como se pudo redactar obtuvimos los intervalos de confianza de un caso de estudio, se ilustro el procedimiento paso a paso considerando el software estadístico R. como se puede notar los eigen-valores 2 y 3 tienen signos negativos, sin embargo, los límites superiores de los intervalos de confianza son positivos. Lo cual implica un cambio en el tipo de punto estacionario. Por otra parte, un eigen valor muy cerca de 0 implica que en el sistema se tiene una región Ridge estacionaria lo cual parece ser el caso del presente estudio.

I. Referencias

Bisgaard, S., & Ankenman, B. (1996). Standar Errors for the Eigenvalues in Second-Order Response Surface Models. *Technometrics*, 238-246.

Carlson, R. (2005). Canonical Analysis of Response Surfaes: A Valuable Tool for Process Development. *Organic PRocess y Develoent*, 321-330.

Chih-Cherng, C., Pao-Lin, S., & Yan-Cherng, L. (2009). Analysis and modeling of effective parameters for dimension shrinkage variation of injection molded part with thin shell feature using response surface methodology. *Springer*, 1088-1095.

Hernandez Martin, Z. (2012). Metodos de analisis de datos: apuntes. *Universidad de La Rioja, Servicio de Publicaciones*, 11-17.