

# Optimización Mediante Análisis Ridge para la Obtención de Ácido Láctico a Partir de Suero de Queso

Víctor Paris Aguilar Reyes<sup>1</sup>, Dr. Luis Alberto Rodríguez Picón<sup>2</sup>,  
Dr. Luis Carlos Méndez Gonzales<sup>3</sup> y Dr. Iván Juan Carlos Pérez Olguín<sup>4</sup>

**Resumen**—La optimización de procesos y productos basada en diseños experimentales es un aspecto importante de cualquier industria. Por supuesto, la optimización tiene como fundamentos diferentes herramientas estadísticas y matemáticas que permiten obtener condiciones ideales de funcionamiento para lograr un objetivo. En el presente artículo se presenta la optimización de un proceso de producción de ácido láctico. La optimización está basada en el análisis Ridge, el cual es un método importante dentro de la metodología de superficie de respuesta. Al implementar esta herramienta fue posible maximizar la producción de ácido láctico a partir de suero de queso, mediante la obtención de las condiciones óptimas de cuatro factores de experimentación. El método es ilustrado a través del presente artículo.

**Palabras clave**—análisis Ridge, optimización, maximizar, ácido láctico, experimentación.

## Introducción

El ácido láctico se considera un compuesto químico con varias aplicaciones, como monómero en plásticos o intermediario en la síntesis de químicos oxigenados, en la industria alimenticia se utiliza para la fermentación y preservación de alimentos, es un metabolito generado por la fermentación realizada por ciertos tipos de microorganismos, lo que permite poder producirlo mediante la fermentación de carbohidratos como la sacarosa, la lactosa, manitol, almidón y dextrosa (Orozco, 2011).

El ácido láctico (2-hidroxipropiónico),  $\text{CH}_3\text{-CHOHCOOH}$ , es el ácido hidroxicarboxílico más común. Fue descubierto por primera vez en 1780 por intermedio en la mayoría de los organismos vivos – desde procariotas a los seres humanos. Aunque el ácido láctico ha sido omnipresente en la naturaleza y se ha producido como subproducto de fermentación en muchas industrias no ha sido un gran volumen químico. (Datta et al., 1995)

El suero es la porción acuosa o suero que se separa que la cuajada durante la convencional fabricación de queso o caseína. Eso constituye alrededor del 85% al 90% del volumen de la leche utilizada para la transformación en queso madurado (Kosikowski, 1979). Sin embargo, grandes cantidades de este subproducto no se aprovechan adecuadamente, y muchas veces se vierten en los ríos aledaños o a los centros productores, como parte de los efluentes fabriles (Miranda & Fonseca, 2007).

El análisis Ridge fue desarrollado originalmente por Hoerl (1959) para examinar superficies de respuesta cuadrática de dimensiones superiores. En contraste con la regresión de la cresta, que es una alternativa a la estimación de mínimos cuadrados en regresión múltiple, el análisis Ridge representa gráficamente el comportamiento de estas superficies y localiza las regiones óptimas generales y locales. La aplicación del análisis Ridge a la solución de ecuaciones lineales simultáneas sugiere que la técnica tiene potencial como un procedimiento de análisis numérico. Puede utilizarse para optimizar y examinar la estabilidad de soluciones “exactas” (Hoerl, 1985).

El análisis Ridge tiene la finalidad ayudar a la obtención de un valor óptimo el cual permita maximizar la producción de ácido láctico a través de el suero de queso mediante la experimentación tomando en cuenta cuatro factores de experimentación óptimos que son; concentración de lactosa (LC), extracto de levadura (YE), temperatura (T) y pH (Leite et al., 2012).

<sup>1</sup> Víctor Paris Aguilar Reyes es Estudiante de Ingeniería Industrial y de Sistemas en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Chihuahua, México. [a1150190@alumnos.uacj.mx](mailto:a1150190@alumnos.uacj.mx) (autor correspondiente)

<sup>2</sup> El Dr. Luis Alberto Rodríguez Picón es Profesor-Investigador del departamento de Ingeniería Industrial y manufactura en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Chihuahua, México. [luis.picon@uacj.mx](mailto:luis.picon@uacj.mx)

<sup>3</sup> El Dr. Luis Carlos Méndez Gonzales es Profesor-Investigador del departamento de Ingeniería Industrial y manufactura en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Chihuahua, México. [luis.mendez@uacj.mx](mailto:luis.mendez@uacj.mx)

<sup>4</sup> El Dr. Iván Juan Carlos Pérez Olguín es Profesor-Investigador del departamento de Ingeniería Industrial y manufactura en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Chihuahua, México. [ivan.perez@uacj.mx](mailto:ivan.perez@uacj.mx)

## Descripción del Método

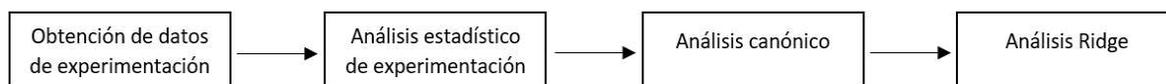


Figura 1. Diagrama de flujo

### Obtención de los datos de experimentación

Los datos para el estudio se obtuvieron del artículo “Canonical Analysis Technique as an Approach to Determine Optimal Conditions for Lactic Acid Production by *Lactobacillus helveticus* ATCC 15009”

El estudio se busca la producción de ácido láctico mediante la bacteria de *Lactobacillus helveticus* ATCC, dicha bacteria se utiliza para la fermentación de procesos de alimentos lácticos.

Gran parte de la producción del suero de queso es desecho y lo cual lo convierte en un gran contaminante, la recuperación de nutrientes del suero de queso y su transformación en compuestos de mayor valor agregado es una mejor opción que el desecho o la eliminación de este. Una de las alternativas más prometedoras que demuestra el estudio es la utilización como fuente de carbono de bajo costo, con el fin de una producción de ácidos orgánicos por fermentación, la mayoría de las investigaciones en los últimos años busca la producción de ácido láctico de valor agregado, mediante la fermentación de la lactosa en el suero presente. Como se ha mencionado el ácido láctico es un producto versátil el cual tiene diversas aplicaciones en varias áreas, en este caso en la industria alimenticia se utiliza para la fermentación y conservación de los alimentos.

El estudio demostró que la metodología de superficie de repuesta que estaba asociada con el análisis canónico era apropiada para encontrar las condiciones que maximizaran la producción de ácido láctico a partir de la fermentación del suero de queso. El experimento que se llevó a cabo es un central compuesto para obtener un valor óptimo de producción se hizo teniendo en cuenta cuatro factores importantes los cuales son; concentración de lactosa (LC), concentración de extracto de levadura (YE). Temperatura (T) y pH.

### Análisis estadístico de la experimentación

El experimento que se consideró en el estudio fue un diseño central compuesto, los resultados obtenidos a través de este diseño fueron analizados mediante Minitab

El propósito inicial de estas técnicas es diseñar un experimento que proporcione valores razonables de la variable de respuestas y a continuación determinar el modelo matemático que mejor se ajusta a los datos obtenidos. El objetivo final es establecer los valores de los factores que optimizan el valor de la variable respuesta (Sánchez, 2011).

El análisis incluyó la estimación tanto de los efectos como de los coeficientes de regresión que conforman el modelo cuadrático ajustado. De igual manera se determinaron los términos significantes.

### Análisis Canónico

Considerando el modelo cuadrático que se ajusta con Minitab, se lleva a cabo el análisis canónico.

Para esto se considera usar el software estadístico R, en el cual se pretende desarrollar un código que contenga los elementos propios del análisis.

El análisis canónico predice sueltamente múltiples variables dependientes a partir de múltiples variables independientes. La técnica canónica se ha utilizado en varios estudios de variables múltiples y sobre optimización de procesos ya que representa ser una herramienta útil para el análisis multivariable y esto se debe a que impone la menor cantidad de restricciones a diferencia de otras técnicas las cuales tienen restricciones más estrictas.

### Análisis Ridge

Pase a la poca popularidad que tienen el análisis Ridge en comparación con otras técnicas y en el campo de estadísticas, esto no impide que sea aplicado por varios ingenieros. Hay varios artículos donde se aplica en análisis Ridge por ejemplo “Mohammed y col. (1979) de Alemania Occidental discutieron el uso del análisis de crestas para optimizar la síntesis de olefinas de Fischer-Tropsch”.

Pese a no recibir el reconocimiento que se merece, el análisis Ridge es útil para optimizar y examinar la estabilidad de las soluciones “exactas”. En este artículo se lleva a cabo el análisis Ridge considerando tanto el modelo cuadrático ajustado como el software R. De igual manera, se considera programar un código que permita implementar los pasos de este método con la intención de maximizar la respuesta del experimento.

## Resultados

Como se menciona en el primer paso del método, los datos de este artículo se tomaron de dicho artículo, a partir de los resultados del experimento se realizó un análisis estadístico, a continuación, se presentan los resultados.

Fuente	GL	SC Ajust.	MC Ajust.	Valor F	Valor P
Modelo	14	6675.25	476.8	10.82	0
Lineal	4	4647.25	1161.81	26.37	0
LC (g/L)	1	716.77	716.77	16.27	0.002
YE (g/L)	1	869.99	868.99	19.72	0.001
T (C)	1	55.26	55.26	1.25	0.285
pH	1	3006.25	3006.25	68.22	0
Cuadrado	4	1125.09	281.27	6.38	0.005
LC (g/L)*LC (g/L)	1	110	110	2.5	0.14
YE (g/L)*YE (g/L)	1	163.52	163.52	3.71	0.078
T (C)*T (C)	1	592.42	592.42	13.44	0.003
pH*pH	1	232.01	232.01	5.27	0.041
interacción de 2 factores	6	902.91	150.48	3.42	0.033
LC (g/L)*YE (g/L)	1	1.28	1.28	0.03	0.868
LC (g/L)*T (C)	1	7.92	7.92	0.18	0.679
LC (g/L)*pH	1	9.33	9.33	0.21	0.654
YE (g/L)*T (C)	1	22.04	22.04	0.5	0.493
YE (g/L)*pH	1	845.36	845.36	19.18	0.001
T (C)*pH	1	16.97	16.97	0.39	0.546
Error	12	528.78	44.06		
Falta de ajuste	10	528.73	52.87	2490.11	0
Error puro	2	0.04	0.02		
Total	26	7204.03			

Tabla 1. Resultados del análisis ANOVA

En la tabla número 1, se puede notar que los términos lineales de LC, YE, pH, los cuadráticos T\*T, pH\*pH y las interacciones de YE\*pH tienen un valor P menor que un nivel de significancia de 0.05, por lo tanto, todos estos términos son significantes. Por otra parte, se puede ver que el término T, los cuadráticos LC\*LC, YE\*YE, los términos interactivos LC\*YE, LC\*T, LC\*pH, YE\*T y T\*pH, tienen un valor P mayor que un nivel de significancia de 0.05 por lo tanto son términos no significantes.

Termino	Coef	EE del coef.	Valor T	Valor p
Constante	35.95	3.26	11.03	0
LC (g/L)	9.08	2.25	4.03	0.002
YE (g/L)	10	2.25	4.44	0.001
T (C)	-2.53	2.26	-1.12	0.285
pH	18.16	2.2	8.26	0
LC (g/L)*LC (g/L)	-7.42	4.69	-1.58	0.14
YE (g/L)*YE (g/L)	-9.04	4.69	-1.93	0.078
T (C)*T (C)	-17.24	4.7	-3.67	0.003
pH*pH	-10.55	4.6	-2.29	0.041
LC (g/L)*YE (g/L)	0.68	3.97	0.17	0.868
LC (g/L)*T (C)	-1.69	3.98	-0.42	0.679
LC (g/L)*pH	1.77	3.85	0.46	0.654
YE (g/L)*T (C)	-2.81	3.98	-0.71	0.493
YE (g/L)*pH	16.86	3.85	4.38	0.001
T (C)*pH	-2.36	3.86	-0.62	0.546

Tabla 2. Resultados de coeficientes codificados

En la tabla 2, se representan las estimaciones de los coeficientes codificados de los diferentes términos del modelo. A partir de estos coeficientes se construyó el modelo cuadrático que se presenta en la ecuación 1.

$$\begin{aligned}
 \text{Acido lactico } \left(\frac{g}{L}\right) = & 35.95 + 9.08 LC \left(\frac{g}{L}\right) + 10 YE \left(\frac{g}{L}\right) - 2.53T(C) + 18.16 pH - 7.42 LC \left(\frac{g}{L}\right) * LC \left(\frac{g}{L}\right) - 9.04 YE \left(\frac{g}{L}\right) * YE \left(\frac{g}{L}\right) \\
 & - 17.24 T(C) * T(C) - 10.55 pH * pH + 0.68 LC \left(\frac{g}{L}\right) * YE \left(\frac{g}{L}\right) - 1.69 LC \left(\frac{g}{L}\right) * T(C) + 1.77 LC \left(\frac{g}{L}\right) * pH \\
 & - 2.81 YE \left(\frac{g}{L}\right) * T(C) + 16.86 YE \left(\frac{g}{L}\right) * pH - 2.39 T(C) * pH
 \end{aligned}$$

Ecuación 1.

Tomando en cuenta la figura 2, se puede notar que no se observan comportamientos que asuman que se viola algún supuesto, existe normalidad de residuos, independencia de residuos y homocedasticidad.

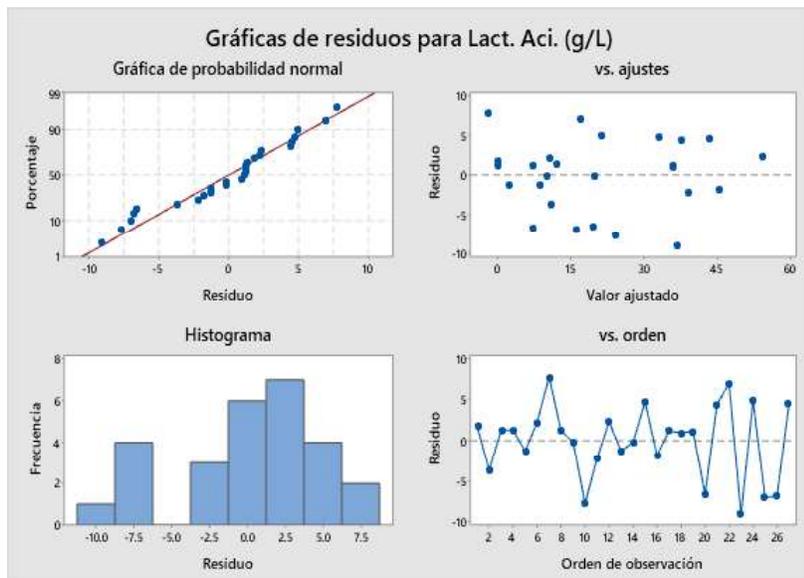


Figura 2. Tabla de supuestos

Independencia de los residuales: en el gráfico de residuales no se observan ninguna tendencia, los valores varían alrededor del 0.

**Análisis Canónico**

A continuación, se procedió a realizar el análisis canónico, para este se consideraron los coeficientes de la tabla 2. El análisis se llevó a cabo mediante un código desarrollado en el software R, el cual se muestra en la figura 3. Al correr el código se obtuvieron los siguientes resultados, el punto estacionario resulto en X1= 0.7191984, X2= -0.1553534, X3= -0.1523971, X4= 0.8141210, la respuesta de predicción resulto en 46.02339, los niveles naturales en el punto estacionario resultaron en X1= 80.78798, X2= 11.12717, X3= 39.39041, X4= 6.814121. Por último, los eigenvalores resultaron en: -17.494601, -9.7188793, -9.718793, -7.317813, se puede notar que todos los signos son negativos por lo tanto se encontró que el punto estacionario es un punto máximo de respuesta.

```
#Definición de la matriz B
B=matrix(c(-7.42,0.34,-0.845,0.885,0.34,-9.04,-1.405,8.43,-0.845,-1.405,-17.24,-.195,0.885,-8.43,-1.195,-
10.55),nrow=4,ncol=4)

#Definición de b
b=matrix(c(9.08,10.00,-2.53,18.16),nrow=4,ncol=1)

#Obtener la matriz inversa de B
B1=solve(B)

#Encontrando el punto estacionario
xs=-0.5*(B1%*%b)

#Calculando la respuesta en el punto estacionario
b0=35.95
ys=b0+(0.5*t(xs)%*%b)

#Encontrando los niveles naturales en el punto estacionario
x1=(0.7191984*(30/2))+70
x2=(-0.1553534*(16/2))+12.37
x3=(-0.1523971*(8/2))+40
x4=(0.8141210*(2/2))+6

#Determinar el tipo de punto estacionario
ei=eigen(B)
```

Figura 3. Código canónico

### Análisis Ridge

A continuación, se procedió a realizar el análisis Ridge, el análisis se llevó mediante un código desarrollado de igual manera en el software R que se muestra en la figura 4. Se consideraron factores como MU, B, b que eran variables que se programaron en el código canónico. La respuesta óptima se programó con la ecuación 1.

Se hizo un barrido dándole diferentes valores a MU con la intención de encontrar la respuesta de optimización y el radio de optimización para MU se toman en cuenta los eigenvalores, los resultados de este barrido se pueden visualizar en la Tabla 3.

```
#Análisis Ridge
sol=solve(B-(MU*diag(4)),-0.5*b)

#Encontrando el radio de optimización
#Alpha = 2
r=sqrt(t(sol)%*%sol)

#Calculando la respuesta óptima
yo=35.95+(9.08*sol[1,1])+(10*sol[2,1])-(2.53*sol[3,1])+(18.16*sol[4,1])-(7.42*(sol[1,1]^2))-
(9.04*(sol[2,1]^2))-(17.24*(sol[3,1]^2))-(10.55*(sol[4,1]^2))+(0.68*sol[1,1]*sol[2,1])-
(1.69*sol[1,1]*sol[3,1])+(1.77*sol[1,1]*sol[4,1])-(2.81*sol[2,1]*sol[3,1])+(16.86*sol[2,1]*sol[4,1])-
(2.39*sol[3,1]*sol[4,1])
```

Figura 4. Código Ridge

MU	r	Y	X1	X2	X3	X4
1	1.010747	45.06559	0.6299272	-0.1077621	-0.1407026	0.7703195
2	0.930549	45.79992	0.55959954	-0.06962752	-0.13049586	0.72862376
3	0.8627713	46.23054	0.5028305	-0.03902645	-0.121486	0.68938655
4	0.8044874	46.44903	0.45610024	-0.01443361	-0.11347301	0.6527542
5	0.753693	46.51874	0.41700717	0.00535916	-0.10630774	0.61873099
5.1	0.7489665	46.51937	0.413447993	0.00711312	-0.1056331	0.61546943
5.11	0.7484971	46.51938	0.413095269	0.00728644	-0.10556603	0.61514466
5.5	0.7306397	46.5123	0.39977437	0.01376258	-0.10300530	0.60267353
8	0.6336272	46.2211	0.33076130	0.04454069	-0.08882309	0.53123155
10	0.5725828	45.82071	0.29021167	0.05962517	-0.07972527	0.48344279

Tabla 3.

### Comentarios Finales

#### Resumen de resultados

Se puede observar en la tabla 3 que la máxima respuesta fue de 46.51938 la cual se encontró con un radio de búsqueda de 0.7484971 tomando en cuenta una MU de 5.11, esta respuesta se puede lograr teniendo en cuenta nuestras x resultado en:  $X1=0.413095269$   $X2=0.00728644$   $X3=-0.10556603$   $X4=0.61514466$ .

#### Conclusiones

Los resultados muestran que se puede ver que la metodología de superficie de respuesta es una metodología apropiada para optimizar procesos pese a la poca utilización del análisis Ridge en otros estudios, se pudo comprobar en este caso de estudio que el análisis es útil para optimizar.

#### Recomendaciones

Como recomendaciones mediante el barrido por el análisis Ridge se recomienda empezar con una MU de 1 e ir aumentando las unidades de acuerdo con las que se necesiten o se vea conveniente, en caso de no encontrar una respuesta apropiada para el estudio se recomienda de igual manera dar unidades pero a la inversa hasta encontrar un punto máximo de respuesta.

### Referencias

Leite, M. T., Barrozo, M. A. D. S., & Ribeiro, E. J. (2012). Canonical analysis technique as an approach to determine optimal conditions for lactic acid production by *Lactobacillus helveticus* ATCC 15009. *International Journal of Chemical Engineering*, 2012. <https://doi.org/10.1155/2012/303874>

Datta, R., Tsai, S. P., Bonsignore, P., Moon, S. H., & Frank, J. R. (1995). Technological and economic potential of poly (lactic acid) and lactic acid derivatives. *FEMS Microbiology Reviews*, 16(2–3), 221–231. [https://doi.org/10.1016/0168-6445\(94\)00055-4](https://doi.org/10.1016/0168-6445(94)00055-4)

Kosikowski, F. V. (1979). Whey Utilization and Whey Products. *Journal of Dairy Science*, 62(7), 1149–1160. [https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302\(79\)83389-5](https://doi.org/10.3168/jds.S0022-0302(79)83389-5)

Miranda, O., & Fonseca, P. (2007). Elaboración de una bebida fermentada a partir del suero de queso: Características distintivas y control de Calidad. *Revista Cubana ...*, 17(2), 103–108. [http://www.revicubalimentanut.sld.cu/Vol\\_17\\_2/Art1\\_103\\_108.pdf](http://www.revicubalimentanut.sld.cu/Vol_17_2/Art1_103_108.pdf)

Orozco, F. (2011). Producción de ácido láctico por medio de fermentación anaerobia y su polimerización a partir de reacciones de apertura de anillo. *Centro de Investigación Científica de Yucatan.*, 1, 3–92. [https://cicy.repositorioinstitucional.mx/jspui/bitstream/1003/1333/1/PMP\\_M\\_Tesis\\_2011\\_Fatima\\_Orozco\\_Olivarez.pdf](https://cicy.repositorioinstitucional.mx/jspui/bitstream/1003/1333/1/PMP_M_Tesis_2011_Fatima_Orozco_Olivarez.pdf)

Sánchez, D. (2011). Método de las Superficies de Respuesta. *Diseño Óptimo de Laminados En Materiales Compuestos. Aplicación Del Método de Las Superficies de Respuesta*, 88–97. <http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/70238/fichero/Capitulo+7.pdf>

Hoerl, R. W. (1985). Ridge analysis 25 years later. *American Statistician*, 39(3), 186–192. <https://doi.org/10.1080/00031305.1985.10479425>