

# PARAMETRIZACIÓN

## DE UN PÉNDULO SIMPLE CON UNA PLATAFORMA BASADA EN ARDUINO

Gustavo Noriega Contreras<sup>1</sup>, Israel U. Ponce<sup>2</sup>, Adriana Salinas Avila<sup>3</sup> y Osslan Osiris Vergara Villegas<sup>4</sup>

<sup>1,2,3,4</sup> Universidad Autónoma de Ciudad Juárez,  
Av. del Charro No. 450 Nte.,  
Col. Partido Romero  
Cd. Juárez, Chih., México,  
C.P. 32310



<sup>2</sup>israel.ulises@uacj.mx

Recibido: Septiembre 13, 2019.

Recibido en forma revisada: Octubre 16, 2019.

Aceptado: Noviembre 4, 2019.

**Resumen:** En el presente trabajo se obtienen las expresiones matemáticas necesarias para determinar los parámetros de la inercia y el coeficiente de fricción de un péndulo simple. Las ecuaciones resultantes se obtienen a partir del comportamiento nominal del péndulo en una región local alrededor del origen, por lo que el modelo linealizado es considerado para la obtención de los parámetros. Para mostrar la eficacia de las expresiones resultantes, se realizan pruebas experimentales con una plataforma Arduino, la cual se utiliza como interfaz para la medición de la posición angular de un péndulo simple a través de un encoder incremental. Los parámetros estimados son utilizados para realizar simulaciones numéricas que son comparadas con los resultados experimentales. Los resultados obtenidos muestran un comportamiento muy similar de los modelos físico y numérico, por lo cual se concluye que las expresiones obtenidas son útiles para la obtención de la inercia y el coeficiente de fricción.

**+ Palabras clave:** Péndulo simple, fricción, inercia, estimación, Arduino.

**Abstract:** In this paper, mathematical expressions are obtained to determine the inertia and the friction coefficient of the simple pendulum. The resulting equations are obtained from the nominal behavior of the

pendulum in a local region around the origin, therefore, the linearized model is considered for obtaining the parameters. To verify the effectiveness of the resulting expressions, experimental tests are performed using an Arduino platform, which is used as an interface to obtain the angular position of a simple pendulum through an incremental encoder. The estimated parameters are used to perform numerical simulations that are compared with the experimental results. The obtained results show a very similar behavior of the physical and numerical models, so it is concluded that the expressions obtained are suitable for obtaining the inertia and the coefficient of friction.

+ **Keywords:** Simple pendulum, friction, inertia, estimation, arduino.

## Introducción

Los parámetros del modelo de un sistema dinámico son de utilidad para simulación y sintonía de controladores. Cuando no se conocen las propiedades físicas del sistema o no se cuenta con los archivos CAD del diseño para obtener los parámetros mediante el uso de software, los parámetros del modelo dinámico bajo estudio pueden estimarse aplicando métodos de identificación. La identificación paramétrica para sistemas robóticos se ha estado estudiando desde hace algunas décadas, como se ve en [1, 4, 7, 9, 11], por mencionar algunos.

Para el caso de sistemas de un grado de libertad, algunos métodos de identificación de sistemas de segundo orden son presentados en [3] y [5] para la identificación del coeficiente de fricción viscosa (entre otros parámetros). En el primero, se obtienen parámetros mecánicos (incluyendo coeficiente de fricción viscosa) y eléctricos considerando de un motor de CD para control de posición; mientras en el segundo, se expone la obtención de los coeficientes de fricción viscosa y de Coloumb considerando medición de velocidad y una entrada específica. Los parámetros de un péndulo invertido son determinados en [12], donde la inercia y el coeficiente de fricción viscosa se obtienen considerando un controlador de posición y las propiedades de un sistema subamortiguado.

Un péndulo simple podría considerarse como un manipulador de un grado de libertad para implementación de controladores. Algunas técnicas de identificación son aplicadas a este sistema en [8].

En este artículo se presenta un método para obtener el valor de la inercia y el coeficiente de fricción viscosa, conociendo algunas propiedades físicas del sistema pendular, como la masa y la longitud al centro de masa, así como una cota del coeficiente de fricción viscosa obtenida a partir de la linealización de un sistema con comportamiento oscilatorio.

Con respecto al uso de un sistema linealizado para identificación paramétrica, además del trabajo de [12] arriba mencionado, en [7] se presenta un método de identificación de los coeficientes de la linealización de un modelo dinámico Euler-Lagrange alrededor de un punto de equilibrio aplicado a robots manipuladores de  $n$  grados de libertad, obteniéndose los coeficientes de inercia, Coriolis y gravitacional, proporcionando diferentes trayectorias, excitando un término a la vez.

El método que se expone en el presente trabajo utiliza una ecuación diferencial (una linealización), y permite obtener de forma directa (en un solo paso) ambos parámetros (inercia y fricción), lo que presenta la ventaja de bajo consumo de tiempo en el proceso de estimación [2]. Adicionalmente, el método utiliza únicamente la medición de la posición angular con un torque de entrada cero, requiriendo una condición inicial cercana al punto de operación bajo estudio.

## Materiales y métodos

### Dinámica del péndulo simple con fricción viscosa

El presente trabajo considera un péndulo simple como el de la Figura 1. La ecuación que representa su dinámica está dada por

$$J\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) + mgl \sin \theta(t) = \tau(t), \quad (1)$$

donde  $J$  es el coeficiente de inercia,  $c$  corresponde al coeficiente de fricción,  $m$  es la masa,  $l$  representa la longitud al centro de masa del péndulo,  $g$  es la constante de gravedad,  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  y  $\ddot{\theta}$  son la posición, velocidad y aceleración angular respectivamente, mientras que  $\tau$  es el torque de entrada del péndulo.

Considerando el vector de estado  $x(t) \in \mathbb{R}^2$ , definido como

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

y entrada nula, esto es

$$\tau(t) = 0,$$

se tiene que la representación en espacio de estados de (1), viene dada por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} f_1(x(t)) \\ f_2(x(t)) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

donde

$$\begin{aligned} f_1(x(t)) &= x_2, \\ f_2(x(t)) &= -\frac{mgl}{J} \sin x_1(t) - \frac{c}{J} x_2(t), \end{aligned} \quad (3)$$

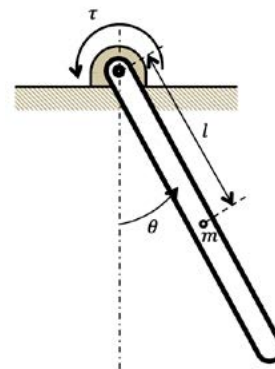


Figura 1. Diagrama del péndulo simple.

La obtención de los parámetros del péndulo se lleva a cabo en una re-

gión local, por lo que se linealiza el sistema (2)-(3), llevándolo a la forma  $\dot{x} = Ax$ ,

donde  $A$  es la matriz Jacobiana [6] descrita por

$$A = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \right|_{x=x_0} \quad (4)$$

El péndulo simple en este trabajo se analiza alrededor de un punto de equilibrio estable, esto es, en  $x = [0 \ 0]^T$ . El sistema linealizado del péndulo alrededor del origen se obtiene al aplicar (4) en (3), de donde se obtiene que

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgl}{J} & -\frac{c}{J} \end{bmatrix} x. \quad (5)$$

### Obtención de los parámetros de fricción e inercia

El sistema (5) presenta un comportamiento definido por los valores propios dados por

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2J} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2J}\right)^2 - \frac{mgl}{J}}.$$

Considerando un coeficiente de fricción  $c$  lo suficientemente pequeño, esto es

$$c < 2\sqrt{Jmgl},$$

como para tener un comportamiento oscilatorio en el péndulo, se tiene que los valores propios del sistema (5) estarán dados por un par de complejos conjugados [10] descritos por

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\beta - \alpha^2},$$

donde

$$\alpha = \frac{c}{2J}, \quad \beta = \frac{mgl}{J}. \quad (6)$$

Por lo tanto, la solución al sistema nominal viene dada por

$$x(t) = e^{-\alpha t} P \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} P^{-1} x_0,$$

donde  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  es la condición inicial del vector  $x(t)$ ,  $P$  corresponde a una matriz de vectores propios válida de la matriz  $A$  del sistema (5), y  $\omega$  es la velocidad angular dada por

$$\omega = \sqrt{\beta - \alpha^2} \quad (7)$$

Considerando que se conocen la condición inicial  $x_0$  y dos posiciones  $x(t_1)$  y  $x(t_2)$ , para  $t_1, t_2 > 0$ , de tal manera que

$$\omega t_i = 2\pi n_i, \quad (8)$$

con  $n_i \in \mathbb{Z}$ , para  $i = \{1,2\}$ , se tendrá entonces que

$$x_1 e^{\alpha t_1} = x_2 e^{\alpha t_2}$$

La condición dada por (8), implica la selección de dos puntos,  $x(t_1)$  y  $x(t_2)$ , separados por  $n_2 - n_1$  periodos de tiempo, donde un periodo de tiempo está dado por  $T = 2\pi/\omega$ . Por lo anterior, se puede decir también que

$$\theta(t_1) e^{\alpha t_1} = \theta(t_2) e^{\alpha t_2}.$$

Tomando en cuenta (8), se tendrá entonces que

$$\frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)} = e^{\frac{2\alpha\pi}{\omega}(n_2 - n_1)}.$$

Realizando las operaciones adecuadas, se encuentra que

$$\alpha = \frac{\omega \ln\left(\frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)}\right)}{2\pi(n_2 - n_1)}. \quad (9)$$

Por otro lado, de (7) se obtiene que

$$\beta = \omega^2 + \alpha^2 \quad (10)$$

Utilizando los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ , obtenidos de las ecuaciones (9) y (10), se pueden calcular los valores de la inercia  $J$  y el coeficiente de fricción  $c$  utilizando las expresiones dadas en (6).

### Determinación de la inercia y del coeficiente de fricción viscosa

Considerando un péndulo simple, definido por la ecuación (1), con torque nulo ( $\tau = 0$ ), masa  $m$ , una longitud al centro de masa  $l$ , y un valor de fricción  $c$  por determinar tal que se produzca un comportamiento oscilatorio exponencialmente estable, se pueden determinar sus parámetros de fricción e inercia partiendo de una condición inicial  $(\theta(0), \dot{\theta}(0))$  distinta de cero. Si se conocen dos posiciones angulares,  $\theta(t_1)$  y  $\theta(t_2)$ , con  $t_2 > t_1$ , separados por  $n_2 - n_1$  periodos de tiempo, y además, se conoce el valor de la frecuencia natural del sistema oscilatorio  $\omega$ , se pueden determinar el valor del coeficiente de fricción  $c$ , y el valor de la inercia  $J$  mediante las expresiones

$$J = \frac{mgl}{\beta}, \quad c = 2J\alpha \quad (11)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  están definidas por las ecuaciones (9) y (10).

### Plataforma experimental

Con el objetivo de probar el método propuesto en la sección 2.3 para obtener los valores de los parámetros del péndulo simple, se utilizó una plataforma experimental conformada por un mecanismo tipo péndulo simple, un encoder, una tarjeta de Arduino UNO, y una computadora con el Software de Simulink de MatLab. En la Figura 2, se muestra el diagrama a bloques de la plataforma experimental.

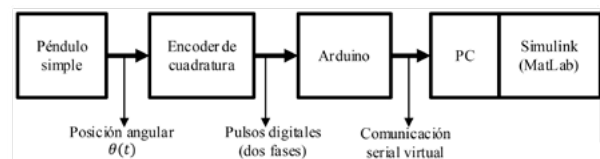


Figura 2. Diagrama de la plataforma experimental.



Figura 3. Péndulo simple utilizado en los experimentos.

El péndulo utilizado en los experimentos se muestra en la Figura 3, el cual tiene una longitud total de 400 mm, y tiene un peso de 97.5 gr. El encoder utilizado es uno rotatorio de la marca Aideepen de 6mm de diámetro del eje, con 600 pulsos por revolución a una fase o 2400 en cuadratura, y una alimentación de 5 a 24 Vcd. Se utilizó una tarjeta de Arduino UNO, de la cual se tomó la alimentación de 5 V para el encoder y se utilizaron sus 2 entradas de interrupciones externas para conectar las líneas de fase del encoder. La plataforma Arduino fue programada para utilizar el encoder en cuadratura, y de esta forma obtener información con una mayor resolución. Para la medición de datos se utilizó una PC con un procesador Intel Core i7-6700 @ 3.4GHz y 8GB de RAM. La visualización de los datos se hizo en Simulink de MatLab versión 2016a. Además, se realizó una conexión serial virtual entre el Arduino y la PC a 19200 bps, y la medición de datos se hizo con una tasa de muestreo de 10 ms.

A continuación, se muestra los resultados obtenidos experimentalmente, donde primero se obtienen los parámetros del péndulo, que luego son utilizados para desarrollar un modelo numérico que es comparado con el modelo real.

## Resultados experimentales

### Estimación de los parámetros

Se realizaron una serie de experimentos para validar la obtención de los parámetros de fricción e inercia del péndulo simple, en cada experimento se obtuvo una gráfica, similar a la de la Figura 4, que muestra el comportamiento de la posición angular respecto al tiempo. Cada experimento se realizó dando una condición inicial distinta de cero al péndulo sin entrada. Posteriormente, se tomaron las coordenadas (posición angular  $\theta_i$  y tiempo  $t_i$ ) de dos puntos máximos de la trayectoria descrita de la posición angular, positivos o negativos, dejando pasar distintos periodos de tiempo entre las dos coordenadas. Los valores  $\theta_i$  y  $t_i$ , así como el número de ciclos  $n_2 - n_1$ , se utilizaron en (9)-(11) para calcular el coeficiente de fricción  $c$  y el valor de la inercia  $J$ . En la Figura 4 se observa un ejemplo de la toma de datos de la gráfica del comportamiento de la posición angular.

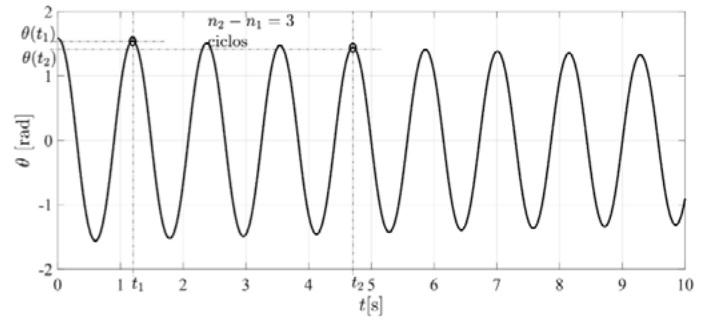


Figura 4. Toma de datos en la gráfica del comportamiento de la posición angular.

Se realizaron 30 experimentos para alcanzar una variación de estimación menor al 1% tanto para la inercia como para el coeficiente de fricción viscosa. Las gráficas de dispersión de los resultados experimentales se muestran en la Figura 5. El valor medio obtenido para la inercia  $J$  es de  $5.08 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  con una desviación estándar de  $1.03 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Mientras que el valor medio para el coeficiente de fricción  $c$  es de  $1.376 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$  con una desviación estándar de  $9.099 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$ .

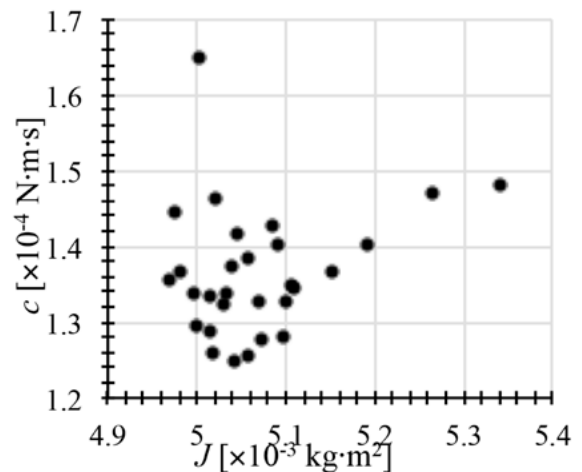


Figura 5. Gráfica de dispersión de datos experimentales.

## Comparación del sistema experimental y simulado

Con el fin de validar los resultados obtenidos, se hizo una comparación entre el comportamiento del sistema experimental y el simulado. Para la simulación se utilizó el algoritmo de integración de paso fijo ode4 (Runge-Kutta), con un paso de integración de 10 ms. Los resultados que se obtuvieron de comparar ambos comportamientos se muestran en la Figura 6.

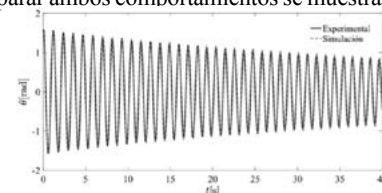


Figura 6. Comportamiento de la posición angular del sistema experimental y simulado.



## Discusión

Las ecuaciones obtenidas para determinar los valores de los parámetros de la inercia y el coeficiente de fricción corresponden a una región local alrededor del origen, por lo que se debe considerar que las condiciones iniciales en los experimentos sean lo suficientemente pequeñas, ya que se observó una dispersión más grande cuando se consideró una posición angular inicial mayor a 1.5 rad.

El valor de los parámetros se obtuvo al utilizar las ecuaciones propuestas, aunque es importante realizar varios experimentos y considerar un método estadístico para obtener valores adecuados de los parámetros.

En el desarrollo de los experimentos, el uso de la plataforma Arduino como tarjeta de adquisición de datos no presentó ningún problema mostrando los resultados de acuerdo con lo previsto, por lo que su uso representa una opción comparada con tarjetas de adquisición más complejas y caras.

Los resultados obtenidos para la inercia presentan una dispersión del 2% respecto al valor medio y su desviación estándar, mientras que para el coeficiente de fricción es del 6.6%, lo cual indica que se puede tener repetitividad en los experimentos sin que se refleje un cambio significativo en la estimación de los parámetros.

La comparación entre el modelo experimental y el numérico muestra que los parámetros estimados y el modelo utilizado predice con cierta exactitud el comportamiento del péndulo, esto se observa en la Figura 6, donde las trayectorias del modelo experimental y del modelo numérico están prácticamente sobrepuestas.

## Conclusiones

El método utilizado en el presente trabajo permite estimar los parámetros de inercia y de fricción de un péndulo simple. Los resultados muestran que el uso de los parámetros estimados por medio de las expresiones propuestas permite predecir el comportamiento de la posición angular del sistema dinámico. El método podría ser utilizado para estimar los parámetros de sistemas más complejos que tengan un comportamiento similar al de un péndulo simple.

## Símbolos

En la Tabla 1 se muestra la lista de símbolos utilizados a lo largo del documento.

Tabla 1. Lista de símbolos utilizados.

Símbolo	Unidad	Descripción
$\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$	rad, rad/s, rad/s <sup>2</sup>	Posición, velocidad, aceleración angular
$m$	kg	Masa
$g$	rad/s <sup>2</sup>	Constante de gravedad
$l$	m	Longitud al centro de masa del péndulo
$J$	kg.m <sup>2</sup>	Coefficiente de inercia
$c$	kg/s	Coefficiente de fricción
$\tau$	N.m	Torque de entrada del péndulo
$\omega$	rad/s	Velocidad angular
$t, t_1, t_2$	s	Tiempo
$\mathbb{R}, \mathbb{Z}$		Conjunto de números reales, conjunto de números enteros
$\lambda_{1,2}$		Valores propios del sistema linealizado
$n_1, n_2$		Periodos de tiempo
$x, \dot{x}, x_0$		Vector de estado, derivada temporal del vector de estado
$A$		Matriz Jacobiana
$P$		Matriz de valores propios



## Bibliografía

[1] Armstrong, Brian (1987). *On Finding Exciting Trajectories for Identification Experiments Involving Systems with Nonlinear Dynamics*. Proceedings. 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Raleigh, NC, New Jersey, 31 March-3 April, 1131-1139.

[2] Benimeli, Francesc; Mata, Vicente y Valero, Francisco (2006). *A comparison between direct and indirect dynamic parameter identification methods in industrial robots*. *Robótica*, 24, 579-590. ISSN #0263-5747.

[3] Campa, Ricardo; Torres, Elio; Salas, Francisco y Santibañez Victor (2008). *On Modeling and Parameter Estimation of Brushless DC Servoactuators for Position Control Tasks*. *Proceeding of the 17th World Congress. The International Federation of Automatic Control*, Seoul, Korea, Julio, 2312-2317.

[4] Han, Yong; Wu, Jianhua; Liu, Chao; Xiong, Zhenua (2019). *Static model analysis and identification for serial articulated manipulators*. *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, 57, 155-165.

[5] Kelly, Rafael; Llamas, Jesús y Campa, Ricardo (2000). *A Measurement Procedure for Viscous and Coulomb Friction*. *IEEE Transactions on Instrument and Measurements*, 49(4), 857 – 861. ISSN #1557-9662.

[6] Khalil, Hassan K. (2002). *Nonlinear Systems*. USA: Prentice-Hall. Tercera edición, ISBN #0-13-067389-7.

[7] Kinsheel, Azeddien y Taha, Zahari (2010). *Identification of the Parameters of Robot Manipulators Dynamics about an Operating Point using Perturbed Dynamics*. 11th Int. Conf. Control, Automation, Robotics and Vision, Singapore, Diciembre. 144-148.

[8] López Alanis, Nayeli María (2010). *Estudio Comparativo de Técnicas de Identificación Aplicadas a Sistemas Mecánicos*. Tesis de Maestría, Instituto Potosino de Investigación Científica.

[9] Moreno-Valenzuela, Javier y Aguilar-Avelar, Carlos (2017). *Motion Control of Underactuated Mechanical Systems*. Switzerland: Springer. ISBN #978-3-319-58318-1.

[10] Ogata, Katsuhiko (2010). *Ingeniería de Control Moderna*. España: Pearson Educación, Quinta edición, ISBN #978-84-8322-660-5.

[11] Reyes, Fernando y Kelly, Rafael (1997). *On Parameter Identification of Robot Manipulators*. *Proceedings of the 1997 IEEE International Conference and Automation*, Albuquerque, New Mexico, April, 1910-1915.

[12] Santamaria-Castillo, Shared; Sánchez-Sánchez, Pablo; Reyes-Cortés, Fernando; Muchua-Camarillo, Antonio; Alexandrov, Vladimir V. y Romero-Rodríguez, Gabriel (2007). *Identificación paramétrica de un péndulo invertido (simulación y evaluación)*, 6to. Congreso Nacional de Mecatrónica, San Luis Potosí, Noviembre, 7-14.