

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ

VOL. VIII

ÁLGEBRA,
BIO-MATEMÁTICAS
Y SISTEMAS
DINÁMICOS

AVANZA

Coordinador:
Luis Loeza Chin

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ

Mtro. Juan Ignacio Camargo Nassar

Rector

Dr. Daniel Constandse Cortez

Secretario General

Dr. Juan Francisco Hernández Paz

Director del Instituto de Ingeniería y Tecnología

Mtro. Jesús Meza Vega

Director General de Comunicación Universitaria

COMITÉ EDITORIAL AVANZA

Dr. Jesús Francisco Espinoza Fierro

Editor Unison

Dr. Ángel Cano Cordero

Editor UNAM

Dr. Luis Loeza Chin

Coordinador UACJ

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ

INSTITUTO DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

CUERPO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS PURAS
Y APLICADAS

**AVANZA: Álgebra, bio-matemáticas y sistemas
dinámicos**

Vol. VIII

Con aportaciones de:

G. Tapia, J. Castro, J. Ríos

O. Osuna, G. Villavicencio

A. Alcorta, M. Frías, M. Grimaldo, E. López

L. Wiebe, J. Castro, Q. Estrada, J. Silva

AVANZA: Álgebra, bio-matemáticas y sistemas dinámicos
[Recurso electrónico] / Coord. Luis Loeza Chin. – Ciudad Juárez, Chihuahua:
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Cuerpo Académico de Matemáticas
Puras y Aplicadas, 2019.
v.8 (96 páginas).

ISBN Colección: 978-607-922-452-3

ISBN V.8: 978-607-520-363-8

Contenido: Algunas relaciones entre las teorías de torsión y las teorías de tipos /
G. Tapia, J. Castro, J. Ríos – Sobre la estabilidad global de campos vectoriales /
O. Osuna, G. Villavicencio – Revisión del estado del arte sobre modelos eco-
epidemiológicos / O. Osuna, G. Villavicencio – Algebrization of planar vector fields /
Alcorta, A., Frías, M., Grimaldo, M., López, E. – Algebrizable infinitesimal Lie
symmetries / López, E., Wiebe, L., Castro, J., Estrada, Q., Silva, J.

1. Teorías de torsión. – 2. Teorías de tipos. – 3. Anillos regulares autoinyectivos. –
4. Problema de estabilidad asintótica global. – 5. Matriz Hurwitz. –
6. Equivalencia topológica. – 7. Bifurcación. – 8. Estabilidad global. –
9. Modelos Presa-Depredador. – 10. Modelos epidemiológicos. –
11. Analytic function theory in algebras. – 12. Abstract differential equations. –
13. Inverse integrating factor. – 14. Ordinary differential equations. –
15. Infinitesimal Lie symmetries. – 16. Associative commutative algebra.

QA159 A83 2019

Cuidado de la edición y diagramación: Luis Loeza Chin.
Corrección: Jorge Hernández Martínez.
Cubierta: Karla María Rascón González.

D.R. © 2019 Luis Loeza Chin
© Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
Av. Plutarco Elías Calles núm. 1210
Fovissste Chamizal, C.P. 32310
Ciudad Juárez, Chihuahua, México

Impreso en México / *Printed in Mexico*

Agradecemos a:

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ

INSTITUTO DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

DIRECCIÓN GENERAL DE COMUNICACIÓN UNIVERSITARIA

COORDINACIÓN GENERAL DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CONTENTS

Presentación	3
Álgebra	5
Algunas relaciones entre las teorías de torsión y las teorías de tipos, (G. Tapia, J. Castro, J. Ríos)	7
Bio-matemáticas	17
Sobre la estabilidad global de campos vectoriales, (O. Osuna, G. Villavicencio)	19
Revisión del estado del arte sobre modelos eco-epidemiológicos, (O. Osuna, G. Villavicencio)	27
Sistemas dinámicos	59
Algebrization of planar vector fields, (Alcorta, A., Frías, M., Grimaldo, M., López, E.)	61
Algebrizable infinitesimal Lie symmetries, (López, E., Wiebe, L., Castro, J., Estrada, Q., Silva, J.)	79

PRESENTACIÓN

El Cuerpo Académico de Matemáticas Puras y Aplicadas del Instituto de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (UACJ) fue creado en 2010 por la firme decisión institucional de consolidar el mejoramiento de la calidad de los académicos adscritos a la Licenciatura en Matemáticas del Departamento de Física y Matemáticas del Instituto de Ingeniería y Tecnología de la UACJ, mediante la incorporación de sus miembros en actividades de investigación científica colectiva y con el compromiso de transmitir esta generación de conocimiento a toda la comunidad universitaria.

Las Líneas de Generación y Aplicación del Conocimiento que cultiva el Cuerpo Académico de Matemáticas Puras y Aplicadas son: Álgebra, Ecuaciones diferenciales y Sistemas dinámicos, matemáticas aplicadas y lógica matemática y fundamentos. Sus miembros trabajan de manera colegiada para la creación de nuevos conocimientos en estas áreas y sus aplicaciones. Asimismo, se busca involucrar a estudiantes avanzados de la Licenciatura en Matemáticas en estas actividades con el objetivo de acercarlos a la investigación científica, contribuyendo con ello a una formación más sólida de los egresados de esta licenciatura.

El presente material es un registro de algunas de las actividades realizadas por el Cuerpo Académico de Matemáticas Puras y Aplicadas. Todos los trabajos incluidos, se han presentado en las actividades regulares del Cuerpo Académico o son producto de los esfuerzos colectivos de sus miembros y sus relaciones de colaboración con investigadores de otras instituciones.

Luis Loeza Chin
mayo de 2019

Álgebra

ALGUNAS RELACIONES ENTRE LAS TEORÍAS DE TORSIÓN Y LAS TEORÍAS DE TIPOS *

G. Tapia, J. Castro, J. Ríos †

Resumen

En [4], Kaplansky desarrolla una Teoría de Tipos para anillos de Baer, en particular, para anillos regulares autoinyectivos, definiendo lo que él llamó tipos I, II y III, y posteriormente haciendo un refinamiento que dio lugar a los tipos I_f , I_∞ , II_f , II_∞ y III . Uno de los resultados importantes de esta teoría, es que prueba que cada anillo regular autoinyectivo se factoriza en un producto directo de anillos de cada uno de los cinco tipos de Kaplansky. La Teoría de Tipos de Kaplansky, se ha estudiado en diversos contextos, como en la subcategoría plena de R -módulos inyectivos no singulares [6] y las categorías espectrales [2]. En [8], Ríos y Tapia definen una Teoría General de Tipos para R -módulos inyectivos no singulares, a través de ciertas cadenas de clases de anillos regulares autoinyectivos, obteniendo de esta forma una Teoría de Tipos por cada cadena. En [7], Raggi y Ríos demuestran que la retícula de idempotentes centrales de un anillo regular autoinyectivo Q , es isomorfa a la de generalizaciones de la Teoría de Torsión de Goldie τ_g , y en vista de que cada idempotente central de Q define un anillo factor de Q , es natural suponer que las teorías de tipos deben tener un reflejo sobre $gen(\tau_g)$.

En este artículo, se definen las Teorías de Torsión de cada tipo y se demuestra que cada tipo define una subretícula de la retícula de generalizaciones de la Teoría de Torsión de Goldie y, además, estas subretículas descomponen de manera única a cada $\tau \geq \tau_g$. Asimismo, se obtienen las propiedades básicas de las teorías de torsión de cada tipo y se demuestran algunas equivalencias.

Palabras clave: Teorías de torsión, teorías de tipos, anillos regulares autoinyectivos.

1 Introducción

A lo largo de todo el artículo, RA denota a la clase de todos los anillos regulares autoinyectivos derechos, τ_g denota a la Teoría de Torsión de Goldie, $gen(\tau_g(R))$ denota a la retícula de generalizaciones de la Teoría de Torsión de Goldie y

*2000, Classifications numbers AMS 16S90, 16E50, 16D50.

†Universidad Autónoma de Ciudad Juárez / Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey / Instituto de Matemáticas UNAM

$Mod-(R, \tau_g)$ denota a la subcategoría plena de R -Mod, cuyos objetos son los R -módulos derechos inyectivos y no singulares. Para otras definiciones y notaciones, véase [3], [5] y [8].

En [7, Teorema 2], se prueba que hay un isomorfismo de retículas completas entre $B(Q)$ y $gen(\tau_g(Q))$ siempre que $Q \in RA$, el cual asocia a cada idempotente central $e \in B(Q)$, la Teoría de Torsión $\chi((1 - e)Q)$.

Por otro lado, en [8, corolario 2.12] se demuestra que, dada cualquier Teoría de Tipos $\bar{T} = \{C_0, \dots, C_n\}$, cada anillo $Q \in RA$ se factoriza en forma única como $Q = Q_1 \times \dots \times Q_n$, donde cada anillo Q_i es del tipo \bar{T}_i para $i = 1, \dots, n$; en vista de que cada Q_i está dado por un idempotente central y este, a su vez, determina una única Teoría de Torsión en $gen(\tau_g(Q))$, es claro, entonces, que debe haber un vínculo entre las teorías de tipos y las teorías de torsión e inclusive, el resultado en [6, teorema 1.15], sugiere que, dado cualquier anillo R , la Teoría de Tipos para R -módulos inyectivos no singulares debe tener un reflejo sobre la retícula $gen(\tau_g(R))$.

2 Teorías de tipos y teorías de torsión

En toda esta sección suponemos que $\bar{T} = \{C_0, \dots, C_n\}$ es una Teoría de Tipos, mediante la cual definimos cuando una Teoría de Torsión $\tau \geq \tau_g$ es del tipo \bar{T}_i para $i = 1, \dots, n$ y probamos que estas clases de teorías de torsión inducen una descomposición de la retícula $gen(\tau_g)$, en el sentido de que cada $\tau \geq \tau_g$ se escribe en forma única como el ínfimo de teorías de torsión de cada tipo.

Definición 2.1. Dado un anillo R y $\tau \geq \tau_g$, decimos que τ es una Teoría de Torsión del tipo \bar{T}_i para $i = 1, \dots, n$, si existe $M \in Mod-(R, \tau_g)$ del tipo \bar{T}_i , tal que $\tau = \chi(M)$.

Vemos que la definición anterior es correcta en el sentido de que no existe $\tau \geq \tau_g$, $\tau \neq \chi$, tal que τ es de más de un tipo a la vez; en efecto, si τ es del tipo \bar{T}_i y del tipo \bar{T}_j con $i \neq j$, entonces existen $M_i, M_j \in Mod-(R, \tau_g)$ del tipo \bar{T}_i y \bar{T}_j , respectivamente, tales que $\tau = \chi(M_i) = \chi(M_j)$ y por [R y T , Lema 2.10] se sigue que $M_i \in T_{\chi(M_j)} = T_{\chi(M_i)}$, de donde $M_i = 0$ y $\tau = \chi$. Es claro, además, que la Teoría de Torsión χ es del tipo \bar{T}_i para cada $i = 1, \dots, n$.

Ahora probamos que las teorías de torsión de cada tipo, inducen una descomposición de cada $\tau \geq \tau_g$.

Proposición 2.2. Para cada $\tau \in gen(\tau_g)$, existen teorías de torsión τ_1, \dots, τ_n únicas de los tipos $\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_n$, respectivamente, tales que

$$\tau = \tau_1 \wedge \dots \wedge \tau_n$$

Demostración. Sea $M \in \text{Mod}-(R, \tau_g)$, tal que $\tau = \chi(M)$ y sea $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ la descomposición en tipos de M y de aquí se sigue que $\tau = \chi(M_1) \wedge \cdots \wedge \chi(M_n)$. Si hacemos $\tau_i = \chi(M_i)$ queda probada la existencia de la descomposición.

Ahora suponemos que existe otra descomposición $\tau = \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n$ con $\sigma_i = \chi(N_i)$, donde $N_i \in \text{Mod}-(R, \tau_g)$ es del tipo \bar{T}_i para cada $i = 1, \dots, n$. Entonces $\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_n \leq \sigma_i$, lo que implica que $N_i \in F_{\wedge \tau_\alpha}$; por otro lado, se sigue de [R y T, Lema 2.10] que $N_i \in T_{\tau_j}$ para todo $j \neq i$; ahora bien, si hacemos $K_i = t_{\tau_i}(N_i)$, entonces $K_i \in T_{\tau_j}$ para $j = 1, \dots, n$ y por lo tanto, $K_i \in T_{\wedge \tau_\alpha}$ y como $K_i \subset N_i$, entonces $K_i \in F_{\wedge \tau_\alpha}$, lo que implica que $K_i = 0$, probando así que $N_i \in F_{\tau_i}$ y por lo tanto, $\tau_i \leq \sigma_i$. Invirtiendo los papeles, obtenemos la otra desigualdad. \square

Corolario 2.3. *Si $\tau \in \text{gen}(\tau_g)$ es una Teoría de Torsión del tipo \bar{T}_i , entonces cualquier cogenerador inyectivo de τ es del tipo \bar{T}_i .*

Demostración. Sea M_R un cogenerador inyectivo de τ y $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ la descomposición en tipos de M , de aquí que $\tau = \wedge \chi(M_i)$. Por la unicidad de la descomposición de la proposición anterior, concluimos que $\chi(M_j) = \chi$ para todo $j \neq i$, de donde $M_j = 0$ para todo $j \neq i$, obteniendo que $M = M_i$, el cual es del tipo \bar{T}_i , como queríamos demostrar. \square

El siguiente resultado muestra que las teorías de torsión de un mismo tipo, definen subintervalos de la retícula $\text{gen}(\tau_g(R))$.

Proposición 2.4. *Sea R un anillo. Entonces:*

- (i) *Si $\tau, \sigma \in \text{gen}(\tau_g(R))$ con $\tau \leq \sigma$ y τ es del tipo \bar{T}_i , entonces σ es del tipo \bar{T}_i . En particular, el supremo de cualquier familia de teorías de torsión de un mismo tipo, es del mismo tipo.*
- (ii) *Sea $\{\tau_\alpha\} \subset \text{gen}(\tau_g(R))$ con cada τ_α del tipo \bar{T}_i , entonces $\wedge \tau_\alpha$ es del tipo \bar{T}_i .*

Demostración. (i) Sea $M \in \text{Mod}-(R, \tau_g)$ del tipo \bar{T}_i , tal que $\tau = \chi(M)$ y por la proposición 2.2 sabemos que $\sigma = \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n$ con $\sigma_j = \chi(K_j)$ del tipo \bar{T}_j para $j = 1, \dots, n$. Ya que $\tau \leq \sigma$, entonces $\tau \leq \sigma_j, \forall j$ y de aquí que $K_j \in F_\tau, \forall j$, pero si $j \neq i$, entonces M y K_j son de tipos distintos y por [R y T, Lema 2.10] se sigue que $K_j \in T_\tau$. Por lo tanto, $K_j = 0, \forall j \neq i$, lo que implica que $\sigma = \sigma_i$ es del tipo \bar{T}_i .

(ii) Hagamos $\tau = \wedge \tau_\alpha$ y sea $\tau = \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n$ la descomposición de τ con $\sigma_i = \chi(M_i)$ del tipo \bar{T}_i . Igual que en (i), se sigue que $\tau \leq \sigma_j$ implica que $M_j = 0, \forall j \neq i$, de donde $\tau = \sigma_i$ es del tipo \bar{T}_i . \square

Debido a esta última proposición, para cada $i = 1, \dots, n$ existe la menor Teoría de Torsión del tipo \overline{T}_i que será denotada como $\tau_{\overline{T}_i}$ para cada i . Nótese, además, que la mayor Teoría de Torsión de cada uno de los tipos es χ , por lo que las teorías de torsión de cada tipo \overline{T}_i forman subintervalos de $\text{gen}(\tau_g(R))$, a saber, $[\tau_{\overline{T}_i}, \chi]$.

Una consecuencia del corolario 2.3 y la proposición 2.4 es la siguiente caracterización de los R -módulos inyectados no singulares del tipo \overline{T}_i .

Proposición 2.5. *Sea $M \in \text{Mod} - (R, \tau_g)$, entonces M es del tipo \overline{T}_i si y solo si $M \in F_{\tau_{\overline{T}_i}}$.*

Otra consecuencia inmediata del corolario 2.3 y la proposición 2.4 es el siguiente resultado que nos muestra que el tipo de la Teoría de Torsión de Goldie para un anillo $Q \in RA$ determina el tipo de Q , de cada objeto de la categoría $\text{Mod} - (Q, \tau_g)$ y de cada elemento de la retícula $\text{gen}(\tau_g)$.

Proposición 2.6. *Sea $Q \in RA$. Son equivalentes:*

- (i) Q es del tipo \overline{T}_i .
- (ii) τ_g es del tipo \overline{T}_i .
- (iii) τ es del tipo \overline{T}_i , $\forall \tau \geq \tau_g$.
- (iv) M es del tipo \overline{T}_i , $\forall M \in \text{Mod} - (Q, \tau_g)$.

A continuación damos una descripción de la descomposición en tipos para $Q \in RA$, en términos de teorías de torsión.

Teorema 2.7. *Para $Q \in RA$, se cumple que*

$$Q \simeq Q/t_{\tau_{\overline{T}_1}}(Q) \times \cdots \times Q/t_{\tau_{\overline{T}_n}}(Q)$$

es la descomposición en tipos de Q .

Demostración. Sea $Q = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ la descomposición en tipos de Q con I_j ideal bilateral del tipo \overline{T}_j . Ya que

$$Q/\bigoplus_{j \neq i} I_j \simeq I_i \in F_{\tau_{\overline{T}_i}},$$

entonces $\bigoplus_{j \neq i} I_j$ es $\tau_{\overline{T}_i}$ -puro, de donde, $t_{\tau_{\overline{T}_i}}(Q) \subset \bigoplus_{j \neq i} I_j$.

Por otro lado, sabemos por [R y T, Lema 2.1] que I_j es de $\tau_{\overline{T}_i}$ -torsión, $\forall j \neq i$, lo que implica la otra contención. Por lo tanto,

$$I_i \simeq Q/t_{\tau_{\overline{T}_i}}(Q)$$

para todo $i = 1, \dots, n$ y es claro que el isomorfismo es de anillos. \square

Enseguida, examinamos la relación que guardan entre sí las teorías de torsión ínfimas $\tau_{\overline{T}_1}, \dots, \tau_{\overline{T}_n}$ dentro de la retícula $gen(\tau_g)$.

Proposición 2.8. *Para cada $i = 1, \dots, n$, las teorías de torsión $\tau_{\overline{T}_i}$ y $\bigwedge_{j \neq i} \tau_{\overline{T}_j}$ son complementarias en la retícula $gen(\tau_g)$.*

Demostración. Sea $\tau_g = \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n$ la descomposición de la Teoría de Torsión de Goldie en los tipos $\overline{T}_1, \dots, \overline{T}_n$. Tenemos, entonces, que

$$\bigwedge_{i=1}^n \tau_{\overline{T}_i} \geq \tau_g = \bigwedge_{i=1}^n \sigma_i \geq \bigwedge_{i=1}^n \tau_{\overline{T}_i}$$

y de aquí que

$$\tau_{\overline{T}_i} \wedge \left(\bigwedge_{j \neq i} \tau_{\overline{T}_j} \right) = \tau_g.$$

Ahora sea

$$\sigma = \tau_{\overline{T}_i} \vee \left(\bigwedge_{j \neq i} \tau_{\overline{T}_j} \right) = \bigwedge_{j \neq i} \left(\tau_{\overline{T}_i} \vee \tau_{\overline{T}_j} \right).$$

Por la proposición 2.4 (i), se sigue que $\tau_{\overline{T}_i} \vee \tau_{\overline{T}_j}$ es del tipo \overline{T}_i y del tipo \overline{T}_j a la vez, lo que implica que $\sigma = \chi$. \square

De esta forma, $\tau_{\overline{T}_1}$ y $\tau_{\overline{T}_2} \wedge \dots \wedge \tau_{\overline{T}_n}$ son complementarias en el intervalo $\langle \tau_g, \chi \rangle$ y de forma análoga, se tiene que $\tau_{\overline{T}_2}$ y $\tau_{\overline{T}_3} \wedge \dots \wedge \tau_{\overline{T}_n}$ son complementarias en el intervalo $\langle \tau_{\overline{T}_2} \wedge \dots \wedge \tau_{\overline{T}_n}, \chi \rangle$ y así sucesivamente.

Ahora obtenemos algunas descripciones de las teorías de torsión ínfimas en términos de las siguientes clases de \mathbf{R} -módulos:

- (i) Sea A_1 la clase de todos los $M \in Mod - (R, \tau_g)$, tales que M es C_1 -módulo.
- (ii) Para $1 < i \leq n$, sea A_i la clase de todos los $M \in Mod - (R, \tau_g)$, tales que M es C_i -módulo y $M \in T_{\tau_{\overline{T}_1} \wedge \dots \wedge \tau_{\overline{T}_{i-1}}}$.

Proposición 2.9. *Para cada anillo R y cada $i = 1, \dots, n$, se cumple que $\tau_{\overline{T}_i} = \chi(A_i)$.*

Demostración. La desigualdad $\tau_{\overline{T}_1} \leq \chi(A_1)$ se sigue del hecho de que cada C_1 -módulo es del tipo \overline{T}_1 ; suponiendo que la desigualdad es estricta, entonces existe $0 \neq E \in T_{\chi(A_1)} \cap F_{\tau_{\overline{T}_1}}$ y ya que $\chi(A_1)$ es una Teoría de Torsión estable, podemos suponer que E es inyectivo. Como $E \in F_{\tau_{\overline{T}_1}}$, entonces E es del tipo \overline{T}_1 y se sigue por [R y T , prop. 2.4], que debe existir un C_1 -módulo $0 \neq K \in L^*(E)$, pero entonces $0 \neq K \in T_{\chi(A_1)}$, lo cual es una contradicción.

Ahora suponemos que $1 < i \leq n$ y sea $M \in A_i$, si $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ es la descomposición de M en los tipos $\overline{T}_1, \dots, \overline{T}_n$, entonces para $j < i$ tenemos que $M_j \in T_{\tau_{\overline{T}_j}}$ (pues $M_j \subset M \in A_i$) y $M_j \in F_{\tau_{\overline{T}_j}}$ (por la prop. 2.5), de donde $M_j = 0$. Para $j > i$, tenemos que M_j es del tipo \overline{T}_j y C_i -módulo; en particular, M_j es C_{j-1} -módulo y usando [R y T , prop. 2.4 (ii)] concluimos que $M_j = 0$. Hemos probado, entonces, que $M = M_i$, que es del tipo \overline{T}_i , obteniendo de esta forma que $\tau_{\overline{T}_i} \leq \chi(A_i)$. Suponiendo que la desigualdad es estricta, tenemos que existe $0 \neq E \in T_{\chi(A_i)} \cap F_{\tau_{\overline{T}_i}}$ y por la estabilidad de $\chi(A_i)$ podemos suponer que E es inyectivo. Como $E \in F_{\tau_{\overline{T}_i}}$, entonces E es del tipo \overline{T}_i y usando nuevamente [R y T , prop. 2.4 (ii)], vemos que existe un C_i -módulo $0 \neq K \in L^*(E)$. Ahora bien, $K \subset E \in F_{\tau_{\overline{T}_i}}$ implica por [R y T , Lema 2.10] que $K \in T_{\tau_{\overline{T}_1} \wedge \dots \wedge \tau_{\overline{T}_{i-1}}}$ y así $K \in A_i$, lo cual es una contradicción, ya que $K \subset E \in T_{\chi(A_i)}$. Por lo tanto, $\tau_{\overline{T}_i} = \chi(A_i)$, como queríamos probar. \square

Corolario 2.10. *Un anillo regular autoinyectivo derecho Q es del tipo \overline{T}_1 si y solo si Q_Q se sumerge en un producto directo de C_1 -módulos.*

Demostración. La suficiencia es clara, ya que en tal caso $\tau_g(Q) = \chi(A_1) = \tau_{\overline{T}_1}$. Para probar la necesidad de la condición, suponemos que Q es del tipo \overline{T}_1 , de donde $\tau_g(Q) = \tau_{\overline{T}_1} = \chi(A_1)$ y de aquí Q_Q se sumerge en un producto directo de Q -submódulos derechos cíclicos de C_1 -módulos. Como Q es anillo regular autoinyectivo derecho, entonces cada Q -módulo derecho cíclico y no singular, es inyectivo y el resultado se sigue usando [R y T , prop. 1.8 (i)]. \square

Otra forma de obtener las teorías de torsión ínfimas, es dada en la siguiente proposición. Antes, definimos las siguientes teorías de torsión:

- (i) Para $i = 0, \dots, n$, sea D_i la clase de todos los $M \in \text{Mod} - (R, \tau_g)$, tales que M es C'_i -módulo y sea $\sigma_i = \chi(D_i)$.

- (ii) Para $i = 0, \dots, n-1$, definimos δ_i por recursión como sigue: $\delta_0 = \tau_g$ y para $0 < i \leq n-1$, δ_i es el complemento de $\tau_{\bar{T}_i}$ en el intervalo $\langle \delta_{i-1}, \chi \rangle$.

Proposición 2.11. *Si σ_i y δ_j se definen como arriba, entonces:*

- (i) $\tau_{\bar{T}_i} = \delta_{i-1} \vee \sigma_i$, para $1 \leq i \leq n-1$.
 (ii) $\tau_{\bar{T}_n} = \delta_{n-1}$.

Demostración. De acuerdo con la definición, se cumple que $\delta_i = \tau_{\bar{T}_{i+1}} \wedge \dots \wedge \tau_{\bar{T}_n}$; en efecto, $\delta_0 = \tau_g = \tau_{\bar{T}_1} \wedge \dots \wedge \tau_{\bar{T}_n}$; asimismo, δ_1 es el complemento de $\tau_{\bar{T}_1}$ en el intervalo $\langle \tau_g, \chi \rangle$, que, como sabemos, es $\tau_{\bar{T}_2} \wedge \dots \wedge \tau_{\bar{T}_n}$, y así sucesivamente. De esto resulta clara la validez de (ii).

Para probar el inciso (i), vemos que de acuerdo con la prop. 2.9, $\tau_{\bar{T}_1} = \sigma_1 = \delta_0 \vee \sigma_1$, lo que prueba el resultado para $i = 1$. Suponemos, entonces, que $1 < i \leq n-1$, por la observación en el párrafo anterior tenemos que $\delta_{i-1} \leq \tau_{\bar{T}_i}$ y por la prop. 2.9 se sigue que $\sigma_i \leq \tau_{\bar{T}_i}$, obteniendo de esta forma que $\delta_{i-1} \vee \sigma_i \leq \tau_{\bar{T}_i}$. Suponiendo que la desigualdad es estricta, tenemos que existe $0 \leq M \in T_{\tau_{\bar{T}_i}} \cap F_{\delta_{i-1} \vee \sigma_i}$ y claramente podemos suponer que $M \in \text{Mod}-(R, \tau_g)$; usando el hecho de que $M \in F_{\sigma_i}$, tenemos que existe $0 \neq N \in L^*(M)$, tal que N es C_i -módulo, y ya que $N \in F_{\delta_{i-1}}$, entonces $N \in T_{\tau_{\bar{T}_1} \wedge \dots \wedge \tau_{\bar{T}_{i-1}}}$, esto se sigue del hecho de que $\delta_{i-1} = \tau_{\bar{T}_i} \wedge \dots \wedge \tau_{\bar{T}_n}$ el cual es el complemento de $\tau_{\bar{T}_1} \wedge \dots \wedge \tau_{\bar{T}_{i-1}}$ en $\langle \tau_g, \chi \rangle$. Por lo tanto, se sigue por la prop. 2.9 que $N \in F_{\tau_{\bar{T}_i}}$, lo cual es una contradicción. \square

Con ayuda de esta última proposición, podemos dar una forma alternativa para definir una teoría de tipos, utilizando las teorías de torsión σ_i definidas arriba.

Proposición 2.12. *Sea $\bar{T} = \{C_0, C_1, \dots, C_n\}$, $n > 0$ una familia que satisface las condiciones (i) y (ii) de [R y T, definición 2.1]. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) \bar{T} es una Teoría de Tipos.
 (ii) Para cada $i = 1, \dots, n$ existe un anillo $Q_i \in RA$, tal que $\chi(A_{i-1}) > \chi(A_i)$, donde A_j denota la clase de todos los $M \in \text{Mod}-(Q_i, \tau_g(Q_i))$, tales que M es C_j -módulo ($j = i-1, i$).

Demostración. En vista de [8, teorema 2.16], es suficiente con probar que la condición (ii) es equivalente a la existencia de anillos $Q_i \neq 0$ del tipo \bar{T}_i para cada $i = 1, \dots, n$. En efecto, si se cumple la condición (ii), entonces para

$i = 1$ existe un anillo $Q_1 \in RA$, tal que $\chi(A_0) > \chi(A_1)$, lo que significa que, en Q_1 -tors, $\chi > \tau_{\overline{T}_1}$, de donde $Q_1/t_{\tau_{\overline{T}_1}}(Q_1) \neq 0$, lo que nos indica que el factor del tipo \overline{T}_1 en Q_1 es distinto de 0. Para $i > 1$, tenemos que existe un anillo $0 \neq Q_i \in RA$, tal que, en Q_i -tors, $\sigma_i < \sigma_{i-1}$ y de aquí que $\tau_{\overline{T}_i} = \delta_{i-1} \vee \sigma_i < \delta_{i-1} \vee \sigma_{i-1} \leq \chi$ y de aquí nuevamente vemos que el factor del tipo \overline{T}_i en Q_i es distinto de 0.

Recíprocamente, suponiendo que Q_i es anillo del tipo \overline{T}_i distinto de 0, entonces $\tau_g(Q) = \tau_{\overline{T}_i} = \delta_{i-1} \vee \sigma_i$, de donde $\delta_{i-1} = \tau_g = \sigma_i$; suponiendo que $\sigma_{i-1} = \sigma_i$, entonces $\tau_{\overline{T}_{i-1}} = \sigma_{i-2} \vee \sigma_{i-1} - 1 \leq \delta_{i-1} \vee \tau_g = \tau_g$, lo cual es una contradicción. \square

Bibliografía

- [1] Dickson, S. A torsion theory for abelian categories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 121 (1966), 223-235.
- [2] Gabriel, P.; Oberst, U. Spektralkategorien und reguläre Ringe in Von-Neumannschen Sinn. *Math. Zeitschrift*, 92 (1966), 389-395.
- [3] Golan, J. Torsion theories. *Longman Scientific & Technical*, Harlow (1986).
- [4] Kaplansky, I. *Rings of operators*. New York, Benjamin (1968).
- [5] Goodearl, K. R. Von Neumann regular rings. *Monographs and Studies in Mathematics*, Pitman (1979).
- [6] Goodearl, K. R.; Boyle, A. K. Dimension theory for nonsingular injective modules. *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 177 (1976).
- [7] Raggi, F.; Ríos, J. On the lattice structure of torsion theories. *Communications in Algebra*, 19 (2) (1991), 669-674.
- [8] Ríos, J.; Tapia, G. A general theory of types for nonsingular injective modules. *Communications in Algebra*, 20 (8) (1992), 2337-2364.

Gustavo Tapia Sánchez (*gtapia@uacj.mx*)

Instituto de Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Ave. del Charro 450 Norte, Partido Romero, Ciudad Juárez, Chihuahua, México, 32310.

Jaime Castro Pérez (*jcastrop@itesm.mx*)

Escuela de Ingeniería y Ciencias, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Calle del Puente 222, Tlalpan, Ciudad de México, México, 14380.

José Ríos Montes (*jrios@matem.unam.mx*)

Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México. Área de la Investigación Científica, Circuito Exterior, C. U., Ciudad de México, México, 04510.

Bio-matemáticas

SOBRE LA ESTABILIDAD GLOBAL DE CAMPOS VECTORIALES *

O. Osuna, G. Villavicencio †

Resumen

En este trabajo se presentan algunos resultados sobre la estabilidad global asintótica de puntos de equilibrio de campos vectoriales bidimensionales. También se dan algunos ejemplos y aplicaciones con el fin de ilustrar nuestros resultados.

Palabras clave: Problema de estabilidad asintótica global, matriz Hurwitz, equivalencia topológica.

1 Introducción

La Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales trata con propiedades locales y globales de las soluciones de ecuaciones diferenciales. La principal meta de esta teoría es obtener una descripción del retrato fase de ecuaciones. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

donde f_i son funciones C^1 sobre \mathbb{R}^n ; también consideramos el campo vectorial $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$; así el sistema (1) se puede reescribir como $\dot{w} = F(w)$, $w = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definición 1.1. Un polinomio real se dice Hurwitz si sus raíces tienen parte real negativa. Una matriz real se dice Hurwitz si sus eigenvalores tienen parte real negativa. Un mapa $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es Hurwitz en $p \in \mathbb{R}^n$ si su derivada $DF(p)$ es una matriz Hurwitz.

Un problema natural en la Teoría Cualitativa de Ecuaciones es estudiar el comportamiento global de una ecuación diferencial, una cuestión de interés es

*2010, Classifications numbers AMS. 34D23, 34B25, 37C10.

†Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana / División de Ciencias Biológicas y de la Salud, Depto. de Ciencias Ambientales, Universidad Autónoma Metropolitana

encontrar conexiones entre ecuaciones de tipo Hurwitz sobre un conjunto adecuado con propiedades de estabilidad del sistema, en particular; dar condiciones suficientes para la estabilidad asintótica global de puntos de equilibrio, este tema es de interés en diversas áreas como teoría de control, economía, mecánica, biomatemáticas; etc. así, obtener condiciones para garantizar la estabilidad global de puntos de equilibrio, es de utilidad en aplicaciones. El bien conocido problema de estabilidad asintótica global o problema de Markus-Yamabe [5] pregunta sobre condiciones suficientes para que un campo vectorial C^1 , cuya derivada es Hurwitz en un conjunto dado, sea asintóticamente estable de manera global. En [7], [3] y [4] se probó de manera independiente que si un campo vectorial bidimensional C^1 tiene derivada $DF(p)$ Hurwitz en todos los puntos del plano entonces el campo es asintóticamente estable de manera global; en forma más precisa establecieron el siguiente:

Teorema 1.2. *Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial C^1 , tal que el origen es un punto de equilibrio. Si la derivada $DF(p)$ es Hurwitz para todo $p \in \mathbb{R}^2$, entonces:*

1. *El origen del sistema asociado (1) es global asintóticamente estable,*
2. *El mapa F es globalmente inyectivo.*

Recordemos que un punto de equilibrio p se dice hiperbólico si los eigenvalores de $DF(p)$ tienen parte real no nula. En [7] fue probada la siguiente interesante generalización:

Teorema 1.3. *Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial C^1 , tal que el origen es un punto de equilibrio hiperbólico. Si la derivada $DF(p)$ es Hurwitz en un conjunto de medida de Lebesgue total de \mathbb{R}^2 entonces el origen del sistema asociado (1) es global asintóticamente estable.*

En este trabajo establecemos una variante al Teorema 1.3, también presentamos condiciones suficientes para que un sistema bidimensional sea global asintóticamente estable; además, damos algunas aplicaciones y ejemplos para ilustrar nuestros resultados.

2 Resultados

Para $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, denotamos por $Z(G) := \{p \in \mathbb{R}^n : G(p) = 0\}$ al conjunto de ceros de G . En particular, para un campo vectorial $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el conjunto $Z(F)$ es su conjunto de puntos de equilibrio. También denotamos por $Z(\text{tr}(DF)) := \{p \in \mathbb{R}^n : \text{tr}(DF(p)) = 0\}$ al conjunto donde la traza de la derivada se anula;

análogamente denotamos $Z(\det(DF))$ como el conjunto donde el determinante es nulo.

Denotemos por $\phi_t(x)$ el flujo (o flujo local) del sistema (1), para $p \in \mathbb{R}^n$ denotemos por (α_p, β_p) el intervalo de definición máxima de la solución de $\phi_t(p)$, notemos que dicho intervalo puede ser finito o infinito. Como es usual denotamos por $\omega(p)$ el conjunto omega límite del punto p , definido como

$$\omega(p) := \{y \in \mathbb{R}^n : \text{existe } t_i \rightarrow \beta_p \text{ creciente con } \lim \phi_{t_i}(p) = y\}.$$

Un punto de equilibrio p es estable, si para toda vecindad U de p , existe una vecindad V de p , tal que $\phi_t(x_0) \in U$ para todo $t \geq 0$, $x_0 \in V$. Si además de ser estable podemos elegir V , tal que $\phi_t(x_0) \rightarrow p$ para todo $x_0 \in V$, el punto se dice asintóticamente estable. La cuenca de atracción de p , es $B(p) := \{x \in \mathbb{R}^n : x \in \omega(p)\}$. En particular, la vecindad U de p es una vecindad de atracción si $U \subset B(p)$.

Decimos que p es global y asintóticamente estable en una región D si D es vecindad de atracción de p , y p es asintóticamente estable.

Decimos que F_1 es topológicamente equivalente a F_2 si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, el cual envía órbitas de $\dot{w} = F_1(w)$ en órbitas de $\dot{z} = F_2(z)$ preservando orientación. Denotamos por $R_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el mapa $R_n(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n)$; el campo vectorial radial.

Nuestro primer resultado es una variante al teorema 1.3 el cual fue probado en [7], por lo que tenemos:

Teorema 2.1. *Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial C^1 . Si la derivada $DF(p)$ es Hurwitz en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ denso y el origen es un punto de equilibrio hiperbólico, entonces F es topológicamente equivalente a R_2 ; en particular, el origen del sistema asociado es global y asintóticamente estable.*

Demostración. Para probar este resultado adaptamos los argumentos presentados en [7] con algunas modificaciones adecuadas. Como el polinomio característico de $DF(p)$ es dado por $t^2 - \text{tr}(DF(p))t + \det(DF(p))$, entonces $DF(p)$ es Hurwitz en p si y solo si $\text{tr}(DF(p)) < 0$ y $\det(DF(p)) > 0$; consideremos el conjunto

$$U := \{p \in \mathbb{R}^2 : \det(DF(p)) > 0\},$$

dado que el campo F es C^1 y $D \subset U$, entonces U es un conjunto abierto y denso; además, tomando límites tenemos $\text{tr}(DF(p)) \leq 0$ y $\det(DF(p)) \geq 0$ para todo $p \in \mathbb{R}^2$. Usando el Teorema 1.1 tenemos que $F_m := F - \frac{1}{m}I$ es inyectivo para todo $m \in \mathbb{N}$ sobre \mathbb{R}_2 , lo cual a su vez implica que F es inyectivo sobre U .

Por el Teorema de la Función Inversa F es un mapa abierto sobre U , como el origen es hiperbólico tenemos $0 \in U$ y $F(0) = 0$, así existe $r > 0$ y $\epsilon > 0$, tal que $B_r(0) \subset U$ y $B_\epsilon(0) \subset F(B_r(0))$. Se sigue de la inyectividad de F sobre U que $F(U \setminus B_r(0)) \cap B_\epsilon(0) = \emptyset$; así, de la continuidad de F y la densidad de U obtenemos $|F(q)| \geq \frac{\epsilon}{2}$ para todo $q \in \mathbb{R}^2 \setminus B_r(0)$; por lo tanto, el origen es el único punto de equilibrio. Finalmente vía la [Proposición 3.4] en [7], tenemos que

$$W^s(0) := \{p \in \mathbb{R}^2 : \omega(p) = \{0\}\}$$

es un conjunto cerrado y abierto; por lo tanto, $W^s(0) = \mathbb{R}^2$; así, por el Teorema de la Variedad Estable [6] el origen es global y asintóticamente estable y F es topológicamente equivalente a R_2 , lo cual prueba el teorema. \square

Como una aplicación directa, tenemos:

Corolario 2.2. *Sea V un polinomio, supongamos que $\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x_1} \geq 0$, $\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x_1} \frac{\partial^2 V}{\partial^2 x_2} \geq \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$ no idénticamente y origen es un punto de equilibrio hiperbólico del sistema gradiente $\dot{w} = -\nabla V(w)$, entonces el origen es global y asintóticamente estable.*

Demostración. Como V es polinomial, la desigualdad $\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} \frac{\partial^2 V}{\partial^2 x_2} \geq \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$ implica que el determinante de la matriz jacobiana es positivo en un conjunto denso D ; esta también implica que $\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x_1}$ y $\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x_2}$ tienen el mismo signo; de nuestra hipótesis estas tienen que ser mayor o igual a 0, en particular la traza de la jacobiana tiene que ser negativa sobre D ; así, se cumplen las condiciones del Teorema 2.1, lo cual prueba nuestro resultado. \square

Otra consecuencia del Teorema 2.1 es:

Corolario 2.3. *Sea $P(x_1, x_2)$ un polinomio, supongamos que $\frac{\partial P}{\partial x_1} \leq 0$, $\frac{\partial P}{\partial x_2} \leq 0$ no idénticamente nulas, si el origen del siguiente sistema es un punto de equilibrio hiperbólico:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_n = P(x_1, x_2), \end{cases} \quad (2)$$

entonces el origen del sistema (2) es global y asintóticamente estable.

Ejemplo 2.4. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_n = -x_1^3 - x_1 - x_2^5 - x_2. \end{cases} \quad (3)$$

Note que el Corolario 2.3 sí aplica; así, el origen es global y asintóticamente estable. A continuación discutimos algunos resultados que garantizan las condiciones del Teorema 2.1; para ello, recordemos el siguiente resultado presentado en [1]:

Teorema 2.5. (Principio de exclusión del cero) *Consideremos una familia de polinomios $P(p, t), p \in \Omega$ con grado constante y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ conexo, suponga que existe un elemento de la familia, el cual es Hurwitz. Entonces cada elemento $P(p, t)$ es Hurwitz si y solo si $P(p, i\omega) \neq 0, \forall p \in \Omega, \omega \in \mathbb{R}$.*

Usando este resultado, combinado con el Teorema 2.1, obtenemos:

Proposición 2.6. *Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial C^1 . Suponga que $Z(\det(DF)) \subseteq Z(\text{tr}(DF))$ y el interior de $Z(\text{tr}(DF)) = \emptyset$, si además cada componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus Z(\text{tr}(DF))$ admite un punto donde su derivada es Hurwitz y el origen es un punto de equilibrio hiperbólico, entonces el origen es global y asintóticamente estable.*

Demostración. Tomemos una componente conexa fija de $\mathbb{R}^2 \setminus Z(\text{tr}(DF))$, llamémosle Ω y consideremos la familia de polinomios cuadráticos $P(p, t) := t^2 - \text{tr}(DF(p))t + \det(DF(p))$ con $p \in \Omega$. Note $P(p, i\omega) \neq 0$ si $\omega \neq 0$ y en el caso $\omega = 0$, se tiene $P(p, i\omega) := \det(DF(p))$, el cual es diferente de 0 si $p \in \Omega$; así, por el Principio de exclusión del cero $DF(p)$ es Hurwitz sobre Ω , como el interior de $Z(\text{tr}(DF)) = \emptyset$, entonces $\mathbb{R}^2 \setminus Z(\text{tr}(DF))$ es denso, es decir, F es Hurwitz sobre un conjunto denso, como también el origen es un punto de equilibrio hiperbólico, entonces el Teorema 2.1 sí aplica; por lo tanto, el origen es global y asintóticamente estable. \square

Otro criterio del Principio de exclusión y nuestro Teorema 2.1 es

Proposición 2.7. *Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial C^1 . Suponga que $\text{tr}(DF) \neq 0$ y $\det(DF(p)) = 0$ a lo más en un conjunto discreto, si además el origen es un punto de equilibrio hiperbólico, entonces el origen es global y asintóticamente estable.*

Demostración. Sea $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus Z(\text{tr}(DF))$, consideremos la familia cuadrática $P(p, t) := t^2 - \text{tr}(DF(p))t + \det(DF(p))$ con $p \in \Omega$. Note $P(p, i\omega) \neq 0$ si $\omega \neq 0$ y en el caso $\omega = 0$, se tiene $P(p, i\omega) := \det(DF(p))$, el cual es diferente de 0 si $p \in \Omega$; así, por el Principio de exclusión del cero $DF(p)$ es Hurwitz sobre Ω , el cual es denso sobre \mathbb{R}^2 , entonces el resultado sigue del Teorema 2.1. \square

Como una consecuencia directa, se tiene:

Corolario 2.8. *Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial C^1 . Suponga que $\det(DF) \neq 0$, $\text{tr}(DF) \neq 0$ y que el origen es un punto crítico Hurwitz, entonces el origen es global y asintóticamente estable.*

Ahora discutimos la estabilidad global de sistemas disipativos. Sea $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suave y suponga que $S := \{x \in \mathbb{R}^2 : \psi(x) = 0\}$ es homeomorfo al círculo S^1 , entonces el disco D limitado por S se dice un disco de disipación del sistema (1) si

$$\langle \text{grad}\psi(x), F(x) \rangle < 0, \quad \forall x \in S, \quad (4)$$

es decir, si en campo vectorial asociado a (1) apunta al interior de D en cada punto de su frontera. Recordemos que el (1) se dice disipativo si existe un disco D de disipación tal que para todo $x \in \mathbb{R}^2$, $\phi_t(x) \in D$ para t suficientemente grande. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.9. *Supóngase que (1) es disipativo con disco de disipación D y que F es Hurwitz en D , entonces F es global y asintóticamente estable.*

Demostración. Note que D es invariante y acotado, como F es Hurwitz en D la divergencia del campo vectorial es negativa sobre D ; así, por el criterio de Bendixson, no existen órbitas periódicas ni políciclos en D . Ahora por el Teorema de Poincaré-Bendixson debe existir, al menos, un punto crítico en $D \cup S$, sin embargo, por (4) este debe estar contenido en D . Ahora por el Teorema de la Función Inversa, F es localmente invertible en D ; por lo tanto, solo puede haber un número finito de puntos críticos en D , como los conjuntos omega límite son abiertos de la conexidad de D solo puede haber un punto crítico en D , denotemos a este por p . Ahora bien, si $x \in \mathbb{R}^2$ entonces tenemos $\phi_t(x) \in D$ para t suficientemente grande; por lo tanto, $\omega(x) = \{p\}$, es decir, p es global y asintóticamente estable, lo cual prueba el resultado. \square

Como otra aplicación del Teorema 2.1 consideramos un campo vectorial C^1 , $F : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ de la forma

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), \dots, f_{2n}(x_{2n-1}, x_{2n})), \quad (5)$$

Note que la matriz jacobiana de un tal F tiene la forma

$$DF(p) = \begin{bmatrix} D_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{n-1} \end{bmatrix},$$

donde los bloques D_i , $i = 0, \dots, n - 1$ corresponden a la matriz jacobiana 2×2 de $(f_{2i+1}(x_{2i+1}, x_{2i+2}), f_{2i+2}(x_{2i+1}, x_{2i+2}))$; para campos (5) tenemos:

Proposición 2.10. *Sea $F : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ un campo vectorial C^1 de la forma (5). Si la derivada $DF(p)$ es Hurwitz sobre un conjunto denso $D \subset \mathbb{R}^{2n}$ y el origen es un punto crítico hiperbólico, entonces F es topológicamente equivalente al campo radial R_{2n} .*

Demostración. Denotemos por $D := \{p_\alpha = (p_1^\alpha, p_2^\alpha, \dots, p_{2n}^\alpha) : \alpha \in I\}$ un conjunto denso donde $DF(p)$ es Hurwitz, es fácil ver que (p_1^α, p_2^α) es un conjunto denso en \mathbb{R}^2 y que F es Hurwitz si y solo si los correspondientes bloques 2×2 son Hurwitz; así, la restricción de F a este conjunto es Hurwitz; por lo tanto, por el Teorema 2.2 la restricción $\bar{F}(x_1; x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ en las primeras dos coordenadas es topológicamente equivalente al campo radial R_2 , análogamente con el resto de los bloques. \square

Bibliografía

- [1] Bhattacharyya, S.; Chapellat, H.; Keel, H. *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA (1995).
- [2] Glutsyuk, A. Asymptotic stability of linearizations of a planar vector field with a singular point implies global stability, *Functional Analysis and Its Applications*, 29(4) (1995), 238-247.
- [3] Gutierrez, C. A solution to the bidimensional global asymptotic stability conjecture, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 12 (1995), 627-671.
- [4] Fessler, R. A proof of the two dimensional Markus-Yamabe stability conjecture and a generalization, *Ann. Polon. Math.*, LXII (1995), 45-74.
- [5] Markus, L.; Yamabe, H. Global stability criteria for differential systems, *Osaka J. Math.*, 12 (1960), 305-317.
- [6] Perko, *Differential equations and dynamical systems*, *Texts in applied Math.*, 7, Springer-Verlag, (2001).
- [7] Rabanal, R.; Pires, B. Vector fields whose linearisation is Hurwitz almost everywhere, *Proceedings of Am. Math. Soc.*, 142(9) (2014), 3117-3128.

Osuna, Osvaldo (*osvaldo@ifm.umich.mx*),
Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás
de Hidalgo, Edif. C-3, Ciudad Universitaria, C. P. 58040. Morelia, Mich.,
México.

Villavicencio-Pulido, Geiser (*j.villavicencio@correo.ler.uam.mx*),
División de Ciencias Biológicas y de la Salud, Depto. de Ciencias Ambien-
tales, Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Lerma. Av. Hidalgo
Poniente No. 46, Col. La Estación, 52006, Lerma de Villada, Edo. de Méxi-
co, México.

REVISIÓN DEL ESTADO DEL ARTE SOBRE MODELOS ECO-EPIDEMIOLÓGICOS *

O. Osuna, G. Villavicencio †

Resumen

La dinámica poblacional y la propagación de una enfermedad infecciosa han sido analizadas ampliamente a través de modelos matemáticos. Es conocido que las enfermedades tienen la capacidad de influir no únicamente en la dinámica de los hospederos sino también en la dinámica de otras especies con las que interactúan de manera indirecta. De la misma manera, especies interactuando pueden modificar la evolución de la enfermedad debido a los cambios en la especie hospedera. El estudio de esos dos efectos combinados es llamado ecoepidemiología. En este trabajo se describen algunos modelos ecoepidemiológicos que muestran dinámicas muy simples y otros que presentan una dinámica muy compleja. Finalmente, se proponen líneas de investigación que coadyuvarán en el desarrollo de la ecoepidemiología.

Palabras clave: Bifurcación, estabilidad global, modelos presa-depredador, modelos epidemiológicos.

Las enfermedades contagiosas aparecen frecuentemente en la naturaleza afectando a las comunidades. En particular, algunos estudios han confirmado que los depredadores tienen la tendencia natural de preferir a las presas jóvenes, débiles o enfermas [1, 2]. Esta preferencia se debe a que los sujetos de estos substractos son más débiles, menos activos o con menos experiencia, en consecuencia pueden ser fácilmente atrapados por los depredadores [23]. Se ha documentado, por ejemplo, que los ataques de lobos sobre alces en la isla Royale, en el lago Superior, es más exitoso cuando los alces están fuertemente infectados con gusano pulmonar [24]. En otros trabajos, se muestra que depredadores como leones y lobos ahorran energía seleccionando a las presas que están más débiles debido a una enfermedad [5, 6]. Además, Lafferty y Morris (véase [20]) observaron experimentalmente que las tasas de depredación de pájaros piscívoros sobre peces infectados es mucho más alta que sobre peces susceptibles. Una explicación puede ser que los peces infectados tienden a vivir cerca de la superficie del

*2010, Classifications numbers AMS. 92D25, 37N25, 92D40.

†Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana / División de Ciencias Biológicas y de la Salud, Depto. de Ciencias Ambientales, Universidad Autónoma Metropolitana

agua. Lo mismo ocurre en caracoles acuáticos, los cuales tienden a vivir sobre la cima de la vegetación en lugar de estar protegidos bajo la cubierta de la planta. Una consecuencia importante de esta característica de depredación podría ser una reducción sustancial en el número de presas infectadas debido a la fuerte depredación. Lo anterior implica que los depredadores desvíen su atención de las presas susceptibles temporalmente (debido a la preferencia por las presas infectadas), lo cual cambiaría la dinámica poblacional. Esto último sugiere la importancia de entender esta dinámica de poblaciones para predecir y controlar su evolución una vez que alguna de las especies interactuantes es susceptible de contraer una enfermedad.

En ese sentido, se ha puesto especial interés en la epidemiología y la ecología matemáticas. Una breve reseña sobre epidemiología matemática muestra que en 1760, Daniel Bernoulli formuló y analizó un modelo para la viruela con el fin de evaluar la eficacia de la inoculación de personas sanas con el virus atenuado de la viruela [?]; sin embargo, la modelación determinista en epidemiología parece haber comenzado en el siglo XX. En 1906, Hamer formuló y analizó un modelo de tiempo discreto en su intento de comprender la recurrencia de epidemias de sarampión [14] y pudo haber sido el primero en suponer que la incidencia (número de casos nuevos por unidad de tiempo) depende del producto de las densidades de los susceptibles y de los infectados. En 1911, Ross estaba interesado en la incidencia y el control de la malaria, por lo que desarrolló un modelo con ecuaciones diferenciales para una enfermedad hospedero-vector para la malaria [25]. En 1926, Kermack y McKendrick publicaron artículos sobre modelos epidemiológicos y obtuvieron el resultado del umbral en epidemiología, el cual dice que la densidad de susceptibles debe ser superior a un valor crítico para que un brote epidémico ocurra [2], [19], [21]. Los modelos más recientes involucran compartimentos con etiquetas tales como M, S, E, I e R, que son usados comúnmente para distinguir entre distintas clases epidemiológicas. La elección de cuáles compartimentos se incluyen en el modelo depende de las características tanto del parásito como del hospedero.

Por otra parte, una revisión breve sobre la ecología de poblaciones muestra que las interacciones entre especies que ocupan el mismo territorio son descritas a través de modelos con interacciones del tipo presa-depredador, competencia, cooperación, parasitismo, etc. El primer modelo para describir la dinámica de presas y depredadores surgió de las investigaciones de Lotka y Volterra. Además de este modelo otros modelos clásicos son el modelo de Holling-Tanner, el modelo de Leslie-Gower y el modelo de Rosenzweig-MacArthur.

Al tratar de entender los efectos que tiene una enfermedad infecciosa en

especies que comparten el mismo territorio y entre las cuales las interacciones pueden ser positivas o negativas para ambas, se dio lugar a la construcción de un nuevo campo llamado ecoepidemiología.

Una revisión sobre el estado del arte en ecoepidemiología mostró que en la mayoría de los casos, los modelos utilizados son sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (cuyo desarrollo se mostrará en este trabajo); sin embargo, existen modelos dados por ecuaciones diferenciales parciales [3], ecuaciones en diferencias [18], autómatas celulares [29] y ecuaciones diferenciales con retardo discreto [11].

Anderson y May [1] presentaron uno de los primeros trabajos en ecoepidemiología. Ellos encontraron que los depredadores y la presas infectadas no coexisten, a menos que estas presas se reproduzcan o que los depredadores seleccionen más presas enfermas que sanas. Mientras que para enfermedades en los depredadores la enfermedad es persistente tanto como las poblaciones de presas puedan alimentar a suficientes depredadores. Haderl y Freedman [13] analizaron un modelo ecoepidemiológico combinando un sistema de Rosenzweig-MacArthur, donde la enfermedad infecta a ambas especies y puede ser transmitida solo tróficamente. Estos dos trabajos han sido la estructura básica de la mayoría de los artículos de ecoepidemiología. Venturino es uno de los pioneros en esta área, y con muchos de sus colaboradores han escrito muchos trabajos en ecoepidemiología (Venturino [31], [32], [33], [34], [35], [36]; Stiefs *et al.* [28]; Haque y Venturino, [15], [16]; [17]; Sarwardi *et al.*, [26]; Ferreri y Venturino, [9], Gimmelli *et al.* [12]). En años recientes, otros autores han escrito extensamente sobre ecoepidemiología. En este trabajo lo que se pretende es dar un panorama sobre el estado actual de la ecoepidemiología. En ese sentido, a continuación se muestran las principales preguntas que surgen en esta área de las bio-matemáticas:

Una vez que una especie es hospedera ¿cambia su comportamiento?

¿Cuál de las especies es infecciosa?, si son ambas, ¿es la enfermedad transmitida tróficamente?

¿La infección limita la habilidad del depredador para capturar las presas?

¿La infección altera la vulnerabilidad de las presas al depredador?

¿La infección altera la capacidad para competir con individuos de su clase?

En las siguientes secciones se muestran resultados obtenidos de analizar algunos modelos ecoepidemiológicos con distintos tipos de interacciones entre las especies, los cuales muestran a grandes rasgos las características esenciales de estos modelos. En este trabajo, a continuación, se introducen el modelo de Lotka-

Volterra y un modelo *SIS*. Después se analizan modelos ecoepidemiológicos con funciones de interacción simple (Ley de acción de masas e incidencia estándar). Además, se modelan interacciones con funciones más complejas (funciones de Holling) y se muestran ejemplos de funciones que describen presas que se agrupan. Finalmente, se da una pequeña discusión y se mencionan algunas futuras líneas de investigación.

Nota: Figuras 3, 4, 5, 6, 7, 9 y 10 pertenecen a los artículos que se están analizando en esas secciones.

1 Modelo Lotka-Volterra y modelos SIS

1.1 Modelo Lotka-Volterra

Umberto D'Ancona, a mediados de la década de los veinte, en el siglo pasado, estudió las variaciones poblacionales de peces que interactúan. A continuación se reproduce la información del puerto de Fiume, Italia, durante los años 1914 a 1923 de selacios.

Año	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
%	11.9	21.4	22.1	21.2	36.4	27.3	16.0	15.9	14.8	10.7

D'Ancona pensó que como se había reducido la captura de peces comestibles, entonces había más presas para los selacios, los cuales se reprodujeron más rápidamente y con éxito. Esta explicación tenía una falla, ya que también había más peces comestibles en ese lapso. La teoría de D'Ancona muestra solamente que hay más selacios si la pesca se realiza a niveles más bajos; no explica por qué un bajo nivel de pesca es más benéfico para el depredador que para la presa.

Después de haber trabajado con el problema un tiempo razonable, D'Ancona se dirigió a su colega Vito Volterra. La esperanza era que Volterra pudiera formular un modelo matemático del crecimiento de selacios y sus presas, y de los peces comestibles, y que dicho modelo diera respuesta a su interrogante. Volterra inició su análisis separando a las poblaciones: $R(t)$, las presas (peces comestibles) y $F(t)$, los depredadores (selacios).

Se supuso que el hábitat para las presas es ilimitado, así que en ausencia de los depredadores las presas se reproducirán exponencialmente a una tasa a . En ausencia de las presas, los depredadores decrecen de manera exponencial a una tasa b . Las interacciones entre individuos de las dos especies resulta en pérdida para las presas y ganancia para los depredadores, las cuales están denotadas por los coeficientes c y d , respectivamente.

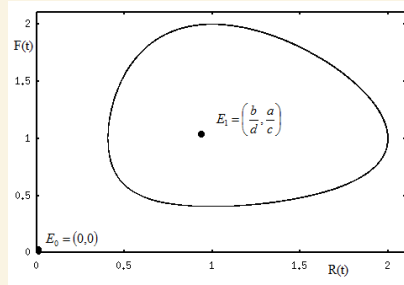


Figura 1: Órbita periódica del modelo presa-depredador.

El modelo Lotka-Volterra para interacciones entre depredadores y presas está dado por:

$$\begin{aligned}\dot{R} &= aR - cRF, \\ \dot{F} &= -bF + dRF.\end{aligned}\tag{1}$$

Obsérvese que el sistema de ecuaciones (1) tiene dos soluciones de equilibrio: $E_0 = (0, 0)$ (extinción) y $E_1 = \left(\frac{b}{a}, \frac{a}{c}\right)$ (coexistencia). Se ha demostrado que E_0 es silla y E_1 es un centro.

Por otro lado, las órbitas del modelo (1), para $x, y \neq 0$ son las curvas soluciones de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)}.$$

Cuya familia de soluciones está dada por

$$\frac{y^a}{e^{by}} \frac{x^c}{e^{dx}} = K.$$

La cual define una familia de curvas cerradas para $x, y > 0$ (véase Figura 1).

1.2 Modelo SIS

Considere que en una población totalmente susceptible se introduce un pequeño grupo de individuos que tiene una enfermedad infecciosa. Preguntas que surgen de forma natural son: ¿Qué ocurre cuando transcurre el tiempo? ¿Aparece una epidemia o desaparece la enfermedad? Estas pueden ser contestadas al construir un modelo que describa la propagación de una enfermedad infecciosa dentro de una población.

Un modelo epidemiológico es el modelo *SIS*, el cual está dado por:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\lambda(N)SI + \gamma I + \mu - \mu S, \\ \dot{I} &= \lambda(N)SI - \gamma I - \mu I.\end{aligned}\tag{2}$$

S e I denotan la fracción de susceptibles e infectados en la población de tamaño N . La función de incidencia $\lambda(N)$ puede ser modelada por una función constante, $\lambda(N) \equiv \lambda$, lo que permite una simple Ley de acción de masas, o por una función no lineal, por ejemplo, $\lambda(N) \equiv \frac{\lambda}{N}$, la cual es considerada en la incidencia estándar. Los parámetros γ y μ denotan las tasas de recuperación de la enfermedad y mortalidad/nacimientos.

En los modelos epidemiológicos un parámetro de especial interés es el número reproductivo básico (denotado por R_0), el cual describe el número de infecciones secundarias que un individuo infectado es capaz de producir cuando es introducido en una población totalmente susceptible durante su periodo de infección. Por lo que cuando $R_0 < 1$ el número de infectados disminuye, mientras que si $R_0 > 1$ la población de individuos infectados aumenta.

En el caso en que la incidencia está dada por una Ley de acción de masas, se tiene $R_0 = \frac{\lambda}{\mu + \gamma}$. Mientras que si existe incidencia estándar, $R_0 = \frac{\lambda}{N(\mu + \gamma)}$. Los puntos de equilibrio asociados a cada modelo están dados por $(1, 0)$ y $\left(\frac{1}{R_0}, \frac{(R_0 - 1)}{R_0}\right)$, para R_0 asociado al tipo de incidencia utilizada. Un análisis de bifurcación muestra que el modelo 2 presenta una bifurcación hacia adelante en $R_0 = 1$ (Véase Figura 2).

A continuación se muestran algunos modelos ecoepidemiológicos resultado de combinar los modelos (1) y (2) y algunas variantes de ellos.

1.3 Descripción general de los modelos ecoepidemiológicos

En los modelos mostrados previamente la velocidad relativa a la que crecen o decrecen las poblaciones, se supone constante cuando no hay interacciones entre ellas (crecimiento/decrecimiento exponencial). Sin embargo, este supuesto está asociado, por ejemplo, a que no existe una limitante por alimento o por espacio. Por el contrario, cuando el crecimiento de la población está acotado por la capacidad de carga del ambiente, se puede decir que la velocidad relativa de crecimiento de la población es decreciente como función de la densidad de la población. Además, entre la velocidad de cambio relativa y la población existe una relación lineal. Eso nos lleva a tener un crecimiento logístico.

En esta revisión de la literatura, se analizan los siguientes modelos ecoepidemiológicos: sean $P \equiv$ Presas, $D \equiv$ Depredadores, $P_I \equiv$ Presas infectadas y $D_I \equiv$

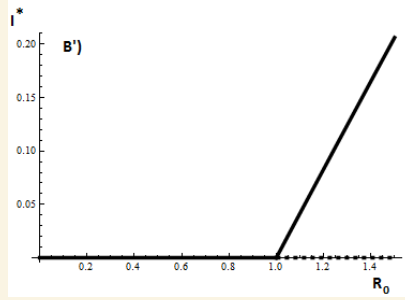


Figura 2: Bifurcación hacia adelante. Si $R_0 < 1$ existe un único estado de equilibrio (equilibrio libre de enfermedad) el cual es localmente asintóticamente estable, mientras que si $R_0 > 1$ el equilibrio libre de enfermedad pierde su estabilidad y aparece un equilibrio endémico localmente asintóticamente estable.

Depredadores infectados, entonces

Modelo ($PP_I D$)	Modelo (PDD_I)
---------------------	--------------------

$$\begin{aligned}
 \dot{P} &= G_1(P) + C_1(P, D, P_I), & \dot{P} &= G_1(P) + C_1(P, D, D_I), & (3) \\
 \dot{P}_I &= G_3(P_I) + C_3(P, D, P_I), & \dot{D} &= G_2(D) + C_2(P, D, D_I), \\
 \dot{D} &= G_2(D) + C_2(P, D, P_I), & \dot{D}_I &= G_3(D_I) + C_3(P, D, D_I),
 \end{aligned}$$

donde G_i describe el crecimiento (exponencial o logístico) de la población en ausencia de las otras especies o clases, y C_i , las interacciones demográficas o epidemiológicas entre individuos de todas las especies o clases. $i = 1, 2, 3$. En las siguientes secciones se muestran combinaciones de los modelos (1) y (2) o modificaciones de ellos, los cuales tienen alguna de las estructuras descritas anteriormente en (3).

2 Modelos ecoepidemiológicos con dinámica simple

A continuación se presentan algunos modelos ecoepidemiológicos en los cuales las interacciones demográficas y epidemiológicas son descritas por una función del tipo Holling I.

2.1 Influencia de enfermedades en modelos presa-depredador

Venturino [31] analiza 8 modelos ecoepidemiológicos que relacionan el modelo de Lotka-Volterra (1) y el modelo SIS (2) utilizando dos tipos de incidencia: Ley de acción de masas e incidencia estándar. En un primer caso supone que la

enfermedad se propaga solamente en las presas ($PP_I D$), y en un segundo caso, los depredadores son los que pueden ser infectados (PDD_I).

Modelo ($PP_I D$)	Modelo (PDD_I)
$\dot{P} = aP - cPD - \lambda PP_I + \gamma P_I,$	$\dot{P} = aP - cPD - \eta PD_I,$
$\dot{P}_I = -\gamma P_I + \lambda PP_I - gP_I D,$	$\dot{D} = -bF + dPD - \delta DD_I + \nu D_I,$
$\dot{D} = -bD + dPD - hP_I D.$	$\dot{D}_I = -\nu D_I + \delta DD_I + ePD_I.$

(4)

Los supuestos sobre los que se construyeron los modelos dados en (4) son los siguientes:

Supóngase que las presas infectadas no se reproducen y que no hay mortandad relacionada con la enfermedad. Se supondrá que la tasa de incidencia está dada por la Ley de acción de masas o la incidencia estándar. Los parámetros demográficos a, b, c y d tienen la interpretación dada en el modelo de Lotka-Volterra, mientras que los parámetros epidemiológicos λ y γ son interpretados como en el modelo SI descrito por el sistema (2).

En el modelo ($PP_I D$) el coeficiente h no tiene restricciones sobre el signo. Si $h < 0$, se tiene un valor positivo de depredación, correspondiente al modelo Lotka-Volterra y finalmente, el parámetro g mide la pérdida de las presas infectadas al interactuar con los depredadores. Mientras que en el modelo (PDD_I), $\delta \equiv \lambda$, $\eta \equiv g$ y $e \equiv h > 0$.

Utilizando una incidencia del tipo Ley de acción de masas y las suposiciones anteriores, se tiene que:

Si se analiza h , se tienen los siguientes casos: $0 < -h < d$, lo cual significa que las presas infectadas tienen un valor nutricional menor que a la de los sanos, y el caso $-h > d$, expresa el hecho de que las presas enfermas son más fáciles de atrapar. Por otro lado, para $h > 0$ se consigue un modelo más interesante. Este caso sugiere que un depredador que interactúa con una presa infectada quizá llegue a enfermarse y finalmente muera. En tal caso, se supondrá que esos depredadores enfermos son incapaces de cazar, así que se pueden remover de la población, lo que simplifica el modelo.

Si se utiliza la incidencia estándar para describir el número de nuevos infectados en los modelos dados en (4), se debe tomar en cuenta el número total de presas y depredadores denotado por N y M , respectivamente. Sean X e Y y W y Z las fracciones de presas y depredadores susceptibles e infectados, entonces:

$$N = P + P_I, X = \frac{P}{N}, Y = \frac{P_I}{N} \text{ y } M = D + D_I, W = \frac{D_I}{M} \text{ y } Z = \frac{P}{M} = 1 - W.$$

Las restricciones sobre las nuevas variables son: $X + Y = 1$, $X, Y, N, F \geq 0$, $z = g - c \geq 0$, $r = \lambda - a$.

Observe que el requerimiento $z \geq 0$ es natural, ya que equivale a exigir que presas infectadas sean más vulnerables a sucumbir a un ataque que los individuos sanos. Después de algunas simplificaciones, se tienen los modelos anteriores pero con una incidencia estándar:

P_I e incidencia estándar	D_I e incidencia estándar
-----------------------------	-----------------------------

$$\begin{aligned} \dot{N} &= N(a - cD - Y(a + zD)), & \dot{P} &= P(a - cM(1 - W) - \eta MW), & (5) \\ \dot{D} &= D(-b + dN - (d + h)YN), & \dot{W} &= W((1 - W)(b + \delta + (e - d)P) - \nu), \\ \dot{Y} &= Y((1 - Y)(r - zD) - \gamma). & \dot{M} &= M((dP - b)(1 - W) + ePW). \end{aligned}$$

A continuación se muestran las soluciones de equilibrio para $\gamma = 0$ y $\gamma \neq 0$.

2.2 Equilibrios en los modelos 4 y 5

En los 8 modelos analizados en [31] aparecen siempre los equilibrios, $E_0 = (0, 0, 0)$ (extinción) y el caso en que existen ambas poblaciones sanas y no existen individuos infectados, el cual es denotado por E_1 , es decir, $P = \frac{b}{d}$, $D = \frac{a}{c}$ y $P_I = 0$ o $D_I = 0$. Para $\gamma = 0$ (modelo *SI*), se tiene:

Modelo	Puntos de equilibrio
$PP_I D, AM$	$E_2 = (0, U_2, 0), E_3 = \left(\frac{g(ah+b\lambda)}{\lambda(ch+dg)}, \frac{adg-cb\lambda}{\lambda(ch+dg)}, \frac{ah+b\lambda}{(ch+dg)} \right)$.
PDD_I, AM	$Q_2 = (0, 0, V_1), Q_3 = \left(P_3, -\frac{eP_3}{\delta}, \frac{ad\delta+ceb}{\delta(\eta d-ce)} \right)$.
$PP_I D, IE$	$P_2 = (N_2, 1, 0), P_3 = \left(\frac{bz\lambda}{rdg+hcr-haz}, \frac{az-rc}{z\lambda}, \frac{r}{z} \right)$.
PDD_I, IE	$T_2 = (0, 1, M_2), T_3 = \left(\frac{\delta+b}{d-e}, \frac{be+d\delta}{\delta(d-e)}, M_3 \right)$.

donde AM =Acción de masas, IE =Incidencia estándar, $P_3 = \frac{b\eta+a\delta}{d\eta-ce}$ y $M_3 = \frac{-a\delta(d-e)}{\delta(ec-\eta d)+eb(c-\eta)}$. Para $\gamma \neq 0$ (modelo *SIS*), se tiene:

Modelo	Puntos de equilibrio
$PP_I D, AM$	$E_i = (P_i, P_{Ii}, D_i)$.
PDD_I, AM	$Q_i = \left(\frac{\delta-D_i}{e}, D_j, \frac{a-cD_i}{\eta} \right)$.
$PP_I D, IE$	$P_4 = \left(0, 1 - \frac{\gamma}{r}, 0 \right), P_j = \left(\frac{b}{d(1-Y_j)-hY_j}, Y_j, \frac{r(1-Y_j)-\gamma}{z(1-Y_j)} \right)$.
PDD_I, IE	$T_4 = \left(0, 1 - \frac{\nu}{b+\delta}, 0 \right), T_j = \left(\frac{b(1-W_j)}{d(1-W_j)+eW_j}, W_j, \frac{a}{c(1-W_j)+\eta W_j} \right)$.

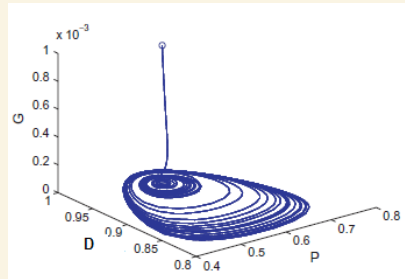


Figura 3: El equilibrio no trivial es inestable, pero bajo algunas condiciones sobre los parámetros las soluciones se aproximan a la solución del modelo de Lotka-Volterra.

donde $AM =$ Acción de masas, $IE =$ Incidencia estándar, $i = 4, 5$, $j = 5, 6$ y P_s, D_s, Y_s y W_s , son soluciones de ecuaciones cuadráticas, las cuales son funciones de los parámetros y U_2, V_1, N_2 y M_2 , valores arbitrarios y fijos.

En [31] se mostró que en los 8 modelos analizados E_0 es inestable. Particularmente, de un análisis de estabilidad de los equilibrios asociados a los modelos $PP_I D$, con la incidencia dada por la Ley de acción de masas (véase modelos 4 y 5), se obtuvieron los siguientes resultados: en todos los casos, el equilibrio E_1 correspondiente al equilibrio trivial neutral del sistema de Lotka-Volterra surge, y muestra su inestabilidad o su estabilidad neutral, en el sentido de que el número de infectados tiende a cero y las trayectorias se aproximan al ciclo límite neutralmente estable en el plano PD (véase Figura 3).

Otro tipo de equilibrios triviales son dados por la línea $P = 0, D = 0$ ($\gamma = 0$) y el número de infectados arbitrario de los depredadores o presas ($P_I, D_I \neq 0$). Este es usualmente estable y corresponde al caso donde únicamente sobreviven los infectados. Un tercer caso es que existen equilibrios no triviales. Resulta, sin embargo, que en los modelos en los que la incidencia es representada por la Ley de acción de masas los equilibrios no son factibles o son inestables en el caso más interesante de valores negativos de depredación donde $h > 0$.

Cuando se usa una incidencia estándar en los modelos PDD_I (véase modelos 4 y 5), si se considera el modelo SI , el equilibrio no trivial no es factible o es inestable nuevamente. Sin embargo, para el caso SIS se obtienen equilibrios no triviales estables. Esos son los casos más interesantes debido a que muestran un comportamiento completamente diferente al caso de Lotka-Volterra. El comportamiento a largo plazo del tamaño de los depredadores alcanza un valor más pequeño que el caso de Lotka-Volterra, mientras que las presas aumentan. Entonces, si la enfermedad se propaga entre las presas, estas pueden actuar como un control sobre los depredadores. Si, en contraste, la enfermedad actúa sobre

los depredadores, los equilibrios T_5 y T_6 muestran nuevamente un nivel más bajo que los correspondientes dados por el modelo de Lotka-Volterra. Se sugiere en [31] que si el objetivo es controlar a la población de depredadores, se puede introducir un plaga sobre ellos; sin embargo, las presas son dañadas, aunque no demasiado.

2.3 Efecto de enfermedades en especies compitiendo

Venturino [32] estudió la dinámica de dos especies compitiendo, $P(t)$ y $Q(t)$. Cada una de ellas susceptible a un patógeno y cuyo crecimiento en cada especie, en ausencia de la otra, está dado por un término logístico. La competencia entre ambas especies puede ser porque ambas son depredadoras y se alimentan una de la otra, o cuando ambas especies sobreviven en el mismo hábitat con el mismo recurso, por ejemplo, ovejas y vacas.

A continuación se muestra el comportamiento de un modelo con competencia intra e interespecífica, las cuales están determinadas por los parámetros b, f y c, e , respectivamente, y ambas especies crecen de manera proporcional a su población con constante de proporcionalidad, a o d .

Un modelo clásico de competencia está dado por:

$$\begin{aligned}\dot{P} &= P(a - bP) - cPQ, \\ \dot{Q} &= Q(d - fQ) - ePQ.\end{aligned}\tag{6}$$

Los estados de equilibrio para el modelo (6) son

Puntos de equilibrio
$\hat{E}_0 = (0, 0), \hat{E}_1 = \left(\frac{a}{b}, 0\right), \hat{E}_2 = \left(0, \frac{d}{f}\right), \hat{E}_3 = \left(\frac{af - cd}{bf - ce}, \frac{db - ae}{bf - ce}\right).$

Cuando \hat{E}_3 es factible puede ser estable o inestable. En el caso en que sea estable ambas especies sobreviven, así que \hat{E}_1 y \hat{E}_2 son inestables. En caso contrario, si \hat{E}_3 es un punto silla entonces \hat{E}_1 o \hat{E}_2 son asintóticamente estables y solamente una especie sobrevive, dependiendo si la condición inicial pertenece a la cuenca de atracción de \hat{E}_1 o \hat{E}_2 . Observe que E_0 es inestable.

2.4 Modelo ecoepidemiológico

A continuación se analiza el caso ecoepidemiológico. Supóngase que una enfermedad solo se propaga en la especie $Q(t)$, y esta clase de infectados es denotada por $V(t)$. Podría pensarse que si un individuo de la especie $P(t)$ contrae la enfermedad, este muere inmediatamente y es removido a través del término de

interacción $-\eta PV$. Usando la incidencia estándar otro modelo puede ser formulado. Así, $Q + V = N$ y definiendo las fracciones $T \equiv \frac{Q}{N}$, $U \equiv \frac{V}{N}$. Se tienen los siguientes modelos:

Acción de masas (PQV)

$$\begin{aligned}\dot{P} &= P(a - bP) - cPQ - \eta PV, \\ \dot{Q} &= Q(d - f(Q + V)) - ePQ - \delta QV + \nu V, \\ \dot{V} &= -\nu V + \delta QV - gPV - fV(Q + V).\end{aligned}\tag{7}$$

Incidencia estándar (PND_I)

$$\begin{aligned}\dot{P} &= P(a - bP - cN - (c - \eta)UN), \\ \dot{N} &= N((1 - U)(d - eP) - fN - gPU), \\ \dot{D}_I &= U((1 - U)((\delta - d) + (e - g)P) - \nu).\end{aligned}\tag{8}$$

Obsérvese que los parámetros η y g en la primera y tercera ecuaciones pueden ser interpretados como una eliminación inmediata de los P y V del modelo, como se discutió arriba, o más como competitividad reducida de la especie infectada. δ y ν denotan la incidencia de la enfermedad, es decir, la habilidad de propagarse a los susceptibles y su tasa de recuperación.

Las letras latinas indican parámetros relativos a las interacciones entre poblaciones, mientras que las letras griegas son parámetros epidemiológicos.

2.5 Ley de acción de masas

Los primeros cuatro estados de equilibrio son análogos al caso estudiado anteriormente, difiriendo ligeramente en sus análisis de estabilidad, debido a que E_3 nunca puede ser estable (véase modelo 6). Los puntos de equilibrio asociados al modelo (7) están dados por:

Puntos de equilibrio
$E_0 = (0, 0, 0), E_1 = \left(\frac{a}{b}, 0, 0\right), E_2 = \left(0, \frac{d}{f}, 0\right), E_3 = \left(\frac{af - cd}{bf - ce}, \frac{db - ae}{bf - ce}, 0\right).$

Un análisis de estabilidad del equilibrio E_3 muestra que si se satisfacen ciertas condiciones sobre los parámetros, el valor propio asociado a la clase $V(t)$ es real negativo, así que las trayectorias tienden al plano $V = 0$, y en este caso, el comportamiento global del modelo se reduce al sistema clásico de competencia y la enfermedad no tiene relevancia (véase Figura 3).

Aquí la epidemia no puede influir sobre la demografía. Sin embargo, se está en el caso en el que se puede remover la población infectada agregando un competidor. La diferencia con E_2 es que, además, el competidor sobrevive y la población en cuestión tiende al equilibrio correspondiente a E_3 . Otros puntos de equilibrio son:

Puntos de equilibrio
$E_{4,5} = \left(0, Q_{4,5}, \frac{(\delta-f)Q_{4,5}}{f} - \nu\right), E_{6,7} = \left(\frac{P(Q_{6,7})}{bf-g\eta}, Q_{6,7}, \frac{V(Q_{6,7})}{bf-g\eta}\right)$

Donde $Q_{4,5}$ son las raíces del polinomio cuadrático.

$$\delta^2 Q^2 - (df + 2\nu f)Q + \nu^2.$$

Con

$$P(Q_{6,7}) = Q_{6,7}(f\eta - \eta\delta - cf) + \eta\nu + af,$$

$$V(Q_{6,7}) = Q_{6,7}(b(\delta - f) + cg) - (sg + b\nu).$$

Donde $Q_{6,7}$ es la solución de la ecuación cuadrática:

$$P(Q) = a_2 Q^2 + a_1 Q + a_0 = 0,$$

y las a_i son funciones de los parámetros.

En [32] se dan condiciones analíticas para que exista un equilibrio no trivial en el que las tres poblaciones coexistan. En cuanto a un análisis de estabilidad, de las otras soluciones de equilibrios, en la mayoría de los casos no se demuestran resultados de estabilidad. Sin embargo, numéricamente se muestra que el modelo presenta órbitas periódicas alrededor del equilibrio endémico, y en los otros casos los resultados son análogos al modelo de competencia sin individuos infectados.

Cuando se tiene una incidencia estándar, podrían existir hasta 9 equilibrios. Un resultado importante es que bajo algunas condiciones sobre los parámetros el equilibrio $\left(\frac{a}{b}, 0, 1 - \frac{b\nu}{b(\delta-d)+a(c-g)}\right)$ es estable, lo que permitiría la coexistencia entre los individuos no susceptibles al patógeno y los individuos infectados de la otra especie. Así que si se agregan los competidores como estrategia de control, entonces no se alcanza el objetivo sin importar con qué tipo de incidencia se contabilizaron los nuevos individuos infectados.

2.6 Efecto de enfermedades en comunidades simbióticas

En Venturino [37] se extienden los análisis previos de modelos presa-depredador o especies compitiendo sujetas a una enfermedad propagándose en una sola especie. En esta sección se analiza el caso en el que las interacciones benefician a

ambas especies.

El modelo clásico de especies simbióticas es descrito por el siguiente modelo, y donde las letras latinas describen efectos demográficos y las letras griegas, efectos epidemiológicos, las cuales son constantes no negativas:

$$\begin{aligned}\dot{P} &= P(a - bP) + cPQ, \\ \dot{Q} &= Q(d - fQ) + ePQ.\end{aligned}\tag{9}$$

En este caso se tiene una relación de mutualismo (beneficio común entre especies).

En este caso se tienen los siguientes equilibrios:

Puntos de equilibrio
$E_0 = (0, 0), E_1 = \left(\frac{a}{b}, 0\right), E_2 = \left(0, \frac{d}{f}\right), E_3 = \left(\frac{af+cd}{bf-ce}, \frac{db+ae}{bf-ce}\right).$

Cuando E_3 es positivo, el equilibrio es estable globalmente. En ese sentido, obsérvese que este nivel de sobrevivencia es más alto que cuando hay exclusión. Esto subraya la esencia del mutualismo. Si $bf < ce$, el ω límite llega a ser el punto (∞, ∞) , *i. e.* una explosión de la población.

2.7 Modelo ecoepidemiológico

Denote V los individuos infectados de la población Q . Obsérvese que si interactúan individuos P y V estas interacciones aún son mutualistas. Sin embargo, cuando los individuos P y V interactúan estas interacciones no serán tan benéficas como cuando interactúan con individuos sanos Q , entonces se usará la letra k para describir estas interacciones, la cual en principio es más pequeña que las interacciones entre individuos sanos modeladas por la letra c . Es decir, k describe el mutualismo reducido. Una discusión similar se da para el beneficio que reciben individuos infectados cuando interactúan con individuos sanos, lo cual es modelado por el parámetro g , el cual podría satisfacer $g > e$. Este beneficio podría ser mayor para los infectados que para los sanos. Mientras que, por otro lado, si se cumple que $g < e$ podría decirse que los individuos enfermos pueden ser menos capaces de vagar por el medio ambiente, beneficiándose menos de las interacciones con la comunidad simbiótica. La tasa a la que se reproducen los individuos sanos está dada por d y de individuos infectados cuyos nacimientos pueden ser sanos o infectados en una tasa h y l , respectivamente.

Bajo los supuestos anteriores, el modelo propuesto en [37] es el que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\dot{P} &= P(a - bP) + cPQ + kPV, \\ \dot{Q} &= Q(d - f(Q + V)) + ePQ - \delta QV + (\nu + h)V, \\ \dot{V} &= V(l - f(Q + V)) + \delta QV + gPV - \nu V.\end{aligned}\tag{10}$$

Enseguida se muestran los equilibrios que son análogos al caso en que no se tienen individuos infectados (modelo 9):

Puntos de equilibrio
$E_0 = (0, 0, 0), E_1 = \left(\frac{a}{b}, 0, 0\right), E_2 = \left(0, \frac{d}{f}, 0\right), E_3 = \left(\frac{af+cd}{bf-ce}, \frac{db+ae}{bf-ce}, 0\right).$

En este caso, el único equilibrio estable es E_3 cuando

$$l - \nu + (\delta - f)Q_3 + gP_3 < \nu.\tag{11}$$

A continuación se muestran los equilibrios en los cuales se tiene existencia de la clase infectada:

Puntos de equilibrio
$E_{4,5} = \left(0, Q_{4,5}, \frac{1}{f}(\delta - f)Q_{4,5} + l - \nu\right), E_{6,7} = (P_{6,7}, Q_{6,7}, V_{6,7}).$

Donde $Q_{4,5}$ son soluciones de la ecuación

$$\Pi(Z) = \delta^2 Z^2 - (f(l - d + h) + \delta(l - 2\nu - h))Z + (\nu + h)(\nu - l) = 0.$$

Se puede demostrar que el equilibrio $E_{4,5}$ cuando es factible es inestable y los equilibrios $E_{6,7}$ tienen la característica de que ambas especies coexisten en niveles diferentes de cero y un estado endémico de la enfermedad. Dichos equilibrios son investigados numéricamente.

$$P_{6,7} = \left(\frac{1}{bf - gk}(Q_{6,7}(cf + k(\delta - f)) + af + k(l - \nu))\right)$$

y

$$V_{6,7} = \left(\frac{1}{bf - gk}(Q_{6,7}(cg + b(\delta - f)) + ag + b(l - \nu))\right).$$

Aquí $Q_{6,7}$ resuelve la ecuación cuadrática $e_0 Z^2 + e_1 Z + e_2 = 0$, donde los coeficientes e_0 , e_1 y e_2 del polinomio son funciones de los parámetros. Esta

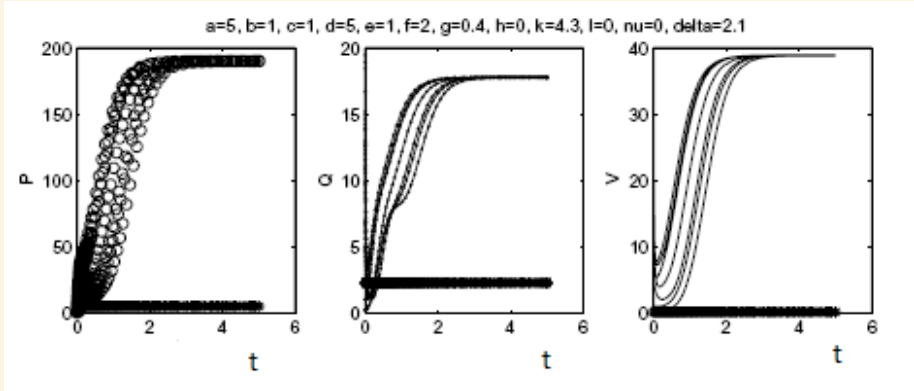


Figura 4: Efecto de la enfermedad sobre E_6 , el equilibrio simbiótico. La línea horizontal representa el estado de equilibrio en ausencia de la enfermedad.

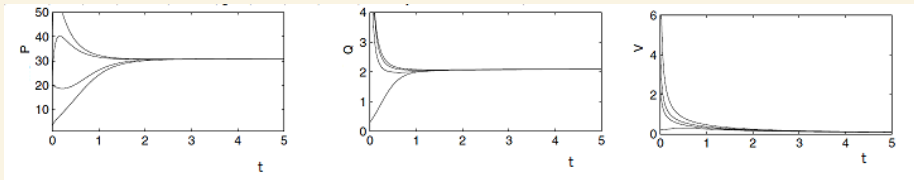


Figura 5: Erradicación de la enfermedad debido a la introducción de una especie simbiótica. Caso favorable con los parámetros: $a = 2, b = 0,1, c = 1, d = 4, e = 0,01, f = 2,05, g = 0, h = 3, k = 0, l = 4,9, \nu = 2,5, \delta = 0,9$.

investigación fue impulsada principalmente por las dos cuestiones biológicas. Se mostró que una enfermedad podría tener un impacto positivo en un sistema simbiótico, un hecho que puede tener una relevancia experimental (véase Figura 4).

También, una especie de reciente introducción, en general, no puede acabar con una enfermedad de otra población con la cual hay una relación de simbiosis. Esto significa que la enfermedad es endémica de la población afectada y no puede desaparecer sin intervención, a menos que la población afectada ya esté en las “condiciones adecuadas” para remover la epidemia por la interacción (véase Figura 5).

En una relación simbiótica, la especie no afectada por la enfermedad nunca puede ser eliminada del ecosistema, como muestra el equilibrio $E_{4,5}$, ya que es inestable cuando es factible. Solo dos resultados son posibles para las trayectorias: tienden a un equilibrio interior en el que ambas especies sobreviven y la enfermedad es endémica (véase Figura 4) o tienden al equilibrio demográfico

subyacente en el que se erradique la enfermedad (véase Figura 5). Nótese que en las condiciones para la estabilidad del equilibrio libre de enfermedad solo el primer valor propio λ_1 es de relevancia (véase 11). Actuar en tales parámetros entonces haría posible erradicar la enfermedad o introducirla en el ambiente. Los resultados de las simulaciones parecen indicar que los únicos dos equilibrios posibles que pueden ser estables no pueden compartir esta propiedad ni su opuesta. De ahí que solo uno a la vez es factible y estable con una gran cuenca de atracción. La condición para que ocurra esto parece reducirse simplemente al signo del primer valor propio del equilibrio libre de enfermedad. Nótese que la estabilidad asintótica local podría llegar a ser global.

3 Modelos ecoepidemiológicos con dinámica compleja

En esta parte del trabajo se presentan modelos ecoepidemiológicos en los cuales las interacciones demográficas y epidemiológicas son descritas por una función del tipo Holling I y II. Es decir, en algunos casos se supone una función de respuesta acotada como función de las especies sanas.

3.1 Oscilaciones en el modelo presa-depredador pueden cambiar cuando las enfermedades son endémicas

Bate y Hilker [4] analizaron un modelo ecoepidemiológico basado en dos modelos: el modelo de Rosenzweig-MacArthur y un modelo SI , en el cual se tiene crecimiento logístico y respuesta funcional tipo Holling II, y decaimiento exponencial de los depredadores sin presas. Se formula el modelo en términos de las poblaciones totales de presas y depredadores, y de la prevalencia de la enfermedad en la población huésped. Es decir, $i_P = \frac{I_P}{S_P + I_P}$ y $i_N = \frac{I_N}{S_N + I_N}$, donde I_P (I_N) y S_P (S_N) son las densidades infectadas y susceptibles de depredadores (presas), respectivamente, y N es la población de presas susceptibles (antes de un cambio de variable); P describe a los depredadores.

Depredadores infectados	Presas infectadas
$\dot{N} = rN(1 - N) - c(N, P),$	$\dot{N} = rN(1 - N) - c(N, P) - \mu N i_P,$
$\dot{P} = -mP + c(N, P) + \mu P i_P,$	$i_N = i_N ((\beta P - \mu)(1 - i_N - r)),$
$i_P = i_P ((\beta - \mu P)(1 - i_P) - c(N, P)).$	$\dot{P} = -mP + c(N, P).$

(12)

donde $c(N, P) := \frac{NP}{h+N}$, μ es la tasa de muerte inducida por la enfermedad, β es la tasa de infecciosidad, r es la tasa de nacimiento per cápita en lugar de una

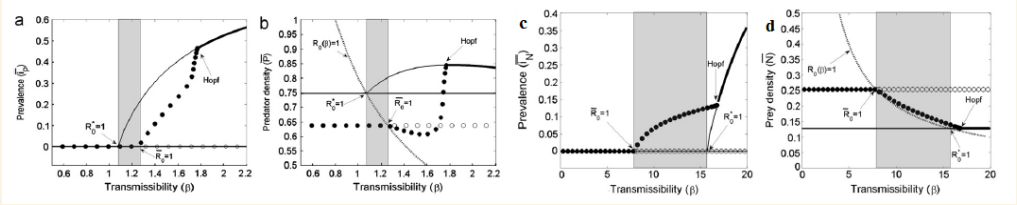


Figura 6: a) y b) Modelo con depredadores infectados, c) y d) Modelos con presas infectadas. La enfermedad se establece en depredadores huéspedes como función de la tasa de transmisión β . Las líneas gruesas describen equilibrios estables, líneas delgadas equilibrios inestables; círculos negros, oscilaciones estables; círculos blancos, oscilaciones inestables; la línea punteada representa $R_0(\beta) = 1$ y cruza $R_0^* = \bar{R}_0 = 1$, explicando la diferencia en la invasión de la enfermedad. $R_0^* = \frac{\beta P^*}{m + \mu}$, $\bar{R}_0 = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T \beta N dt}{\mu + r}$. P^* y N^* son los estados de equilibrio (inestables) de la variable.

tasa de crecimiento. Esto significa que las presas susceptibles solo experimentan mortalidad vía depredación y competición, y h es la densidad de saturación media para la respuesta funcional del tipo Holling II. Los parámetros del modelo son fijos, de tal manera que el sistema tiene un ciclo límite en ausencia de la enfermedad. En este caso, $m < \frac{1-h}{1+h}$.

La Figura 6a muestra cuando una enfermedad se establece en una población de depredadores que oscila. Para transmisiones bajas, la enfermedad no es endémica y solamente las oscilaciones en el equilibrio libre de enfermedad son estables. En $R_0 = 1$, un equilibrio endémico bifurca desde el equilibrio presa-depredador libre de enfermedad. Para una región de parámetros después de uno, se tienen oscilaciones libres de enfermedad con un estado de equilibrio inestable. Es decir, la enfermedad no es endémica a pesar de $R_0^* > 1$. En $\bar{R}_0 = 1$ un ciclo límite endémico bifurca desde el ciclo límite estable libre de enfermedad en los depredadores. Más allá de esto, las oscilaciones son endémicas hasta que colapsan con un equilibrio inestable en una bifurcación de Hopf. Dando lugar a estados endémicos estables. Además, se muestra que el equilibrio libre de enfermedad es estable para valores de $R_0 > 1$ y P^* . Esto significa que el sistema permanece libre de enfermedad para un rango de parámetros grande debido a la dinámica oscilatoria.

La Figura 6b muestra que esta diferencia puede ser atribuida a diferencias entre el equilibrio y las oscilaciones de los depredadores.

Por otro lado, en la Figura 6c se muestra que las oscilaciones en el estado endémico (estable) bifurcan desde el equilibrio libre de enfermedad del presa-depredador antes de que el equilibrio endémico bifurque desde el equilibrio libre

de enfermedad. Esto contrasta con el caso anterior (Figura 6a), donde las oscilaciones bifurcan antes del punto de bifurcación. Por lo tanto, existe una región (región gris) donde la enfermedad es endémica y las oscilaciones, despreciables para $R_0^* < 1$. En este caso, $R_0^* = \frac{\beta N^*}{\mu + r}$. Finalmente, en la Figura 6d se muestra que este cambio puede ser atribuido a la diferencia entre N^* y \bar{N} .

Obsérvese que en ambos modelos, donde se tienen presas o depredadores infectados, el equilibrio puede estabilizarse.

Bate y Hilker [4] demuestran que las condiciones para que una enfermedad llegue a ser endémica en una población huésped involucrando una relación presa-depredador, depende de la densidad huésped en el tiempo promediado. Las oscilaciones en el modelo Rosenzweig-MacArthur tienen un gran tiempo promedio de densidad en las presas y bajo en los depredadores comparado con su correspondiente equilibrio. Esto significa que las oscilaciones en el modelo presa-depredador con más facilidad serán endémicas en una población de presas y más difícilmente en una población de depredadores.

3.2 Transmisión dependiente de la enfermedad (DD Model) y transmisión dependiente de la frecuencia (FD Model)

Bate and Hilker [5] analizan dos modelos, en los cuales las presas (denotadas por X) crecen logísticamente con capacidad de carga K en ausencia de depredadores. En la ausencia de presas, los depredadores decrecen exponencialmente. La depredación es descrita por una respuesta funcional del tipo Holling II. Las infecciones son descritas por un modelo SI. Los depredadores susceptibles e infectados son denotados por S e I , respectivamente.

La presencia de enfermedades infecciosas puede cambiar dramáticamente la dinámica de sistemas ecológicos. En este modelo se muestra la existencia de una bifurcación del tipo silla y una bifurcación de Hopf subcrítica intercambiando puntos y ramas en soluciones periódicas, y una cascada de periodo doble al caos. En este modelo se muestra que hay regiones de biestabilidad, en las cuales la enfermedad puede o no establecerse. Además, existe triestabilidad, la cual envuelve un toro endémico (o ciclo límite), un equilibrio endémico o un ciclo límite libre de enfermedad. El toro endémico parece desaparecer vía una órbita homoclínica. Notablemente, algunas de esas dinámicas ocurren cuando $R_0 < 1$, donde no se esperarían situaciones endémicas en absoluto. Los regímenes multiestables hacen que el sistema sea muy sensible a las perturbaciones y facilite una serie de cambios de régimen, algunos de los cuales pueden ser irreversibles. El modelo usado es basado en el modelo Rosenzweig-MacArthur. En este caso, b es la tasa de crecimiento de las presas cuando la población es pequeña, H es la densidad

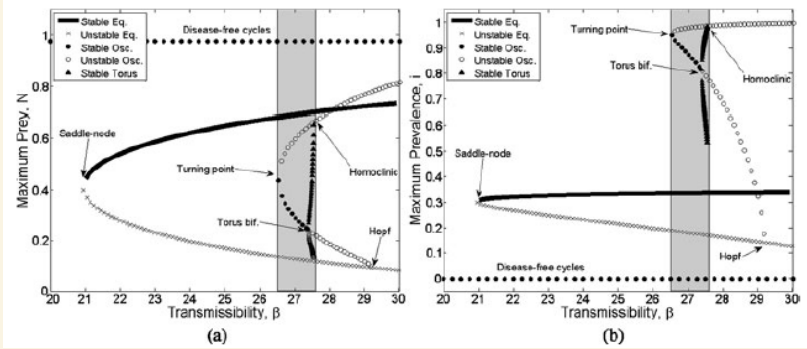


Figura 7: Bifurcaciones toro y triestabilidad en el modelo DD. La región gris muestra una zona de triestabilidad entre el equilibrio libre de enfermedad con presas y depredadores, un equilibrio con coexistencia y un ciclo límite con coexistencia o toro. En ambas figuras $R_0^* < 1$ y $R_0 < 1$.

de saturación media, a es la tasa de depredación máxima por depredador por presa, e es la tasa de conversión de biomasa, d es la tasa de muerte per cápita del depredador, α es la tasa de muerte inducida por la enfermedad y σ es el coeficiente de transmisibilidad.

Modelo DD	Modelo FD
$\dot{X} = bX \left(1 - \frac{X}{K} \right) - \frac{aX(S+I)}{H+X},$	$\dot{X} = bX \left(1 - \frac{X}{K} \right) - \frac{aX(S+I)}{H+X},$
$\dot{S} = -dS + e \frac{aX(S+I)}{H+X} - \sigma SI,$	$\dot{S} = -dS + e \frac{aX(S+I)}{H+X} - \sigma \frac{SI}{S+I},$
$\dot{I} = \sigma SI - (d + \alpha)I.$	$\dot{I} = \sigma \frac{SI}{S+I} - (d + \alpha)I. \quad (13)$

El modelo DD presenta triestabilidad, un toro estable y su destrucción vía una bifurcación homoclínica. Mientras que el modelo FD puede exhibir caos vía una cascada de periodo doble. Además, existe histéresis.

La figura 7 describe la dinámica del sistema cuyo comportamiento se enuncia a continuación:

- Existe una bifurcación del tipo silla en el equilibrio en que coexisten todas las especies.
- Existe biestabilidad entre oscilaciones libres de enfermedad y equilibrios en coexistencia.

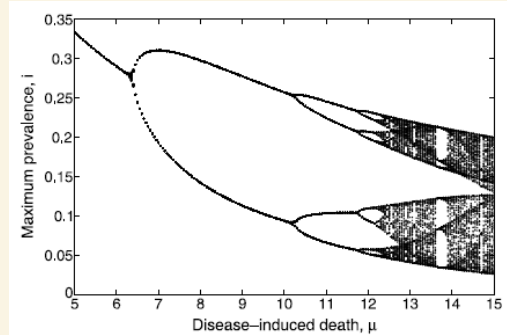


Figura 8: Cascada de doble periodo, la cual resulta caótica inmediatamente después de $\mu = 12$.

- Las bifurcaciones de silla y Hopf tienen una posición cambiante (bifurcación tangencial).
- Surge una bifurcación toro a través del ciclo límite inestable que emana de la bifurcación de Hopf, estabilizando el ciclo límite.
- El toro estable creado en la bifurcación toro es destruido por una bifurcación homoclínica.

En [5] se muestra que en el modelo FD, aumentada la tasa de muerte inducida por la enfermedad μ , surgen bifurcaciones de periodo doble (véase Figura 8).

También se muestra que en el modelo DD, bifurcaciones de periodo dos no han sido encontradas; sin embargo, en [5] se comenta que bifurcaciones de periodo dos y el fenómeno de la cascada al caos podrían existir.

4 Modelos con presas infectadas y defensa grupal

En esta sección se describen tres modelos ecoepidemiológicos que describen la defensa de las presas, debida a la manada o rebaño. Cada uno de los tres modelos presentados en esta sección utilizan una función distinta para describir esta defensa. En el primer caso, una función no acotada y, finalmente, las dos restantes son funciones acotadas del tipo Holling II y IV.

4.1 Un modelo ecoepidemiológico con depredadores enfermos y defensa grupal de las presas

En este trabajo, Belvisi y Venturino [7] analizan el comportamiento de una población de presas que se reúnen en manadas o rebaños, así como una población de depredadores, los cuales pueden ser sanos o infectados. $\bar{R}(t)$ denota la población de presas, \bar{F} , los depredadores sanos, y \bar{G} , los enfermos. Supóngase que las presas se reproducen logísticamente a una tasa intrínseca \bar{r} y con capacidad de carga \bar{K} , y son capturadas a una tasa \bar{a} por los depredadores sanos. Dado que las presas se reúnen en manadas, los individuos en su frontera se verán afectados en su mayoría por los ataques de los depredadores. Esto se modela usando un término a razón de raíz cuadrada para la población de presas, representando la población de presas que ocupa esta parte del suelo. Este término es similar a usar una función de respuesta del tipo Holling II, pero los mecanismos biológicos son completamente distintos, ya que en el otro caso se emplea para describir la saciedad de los depredadores, $\bar{\lambda}$ es la tasa de transmisión, \bar{m} es la tasa de mortalidad de los depredadores, y \bar{e} representa el factor de conversión de presas capturadas a depredadores. Los depredadores infectados se supone que son cazadores más débiles, por lo que ellos mueren a una tasa \bar{n} expresando la combinación de muerte natural y mortalidad relacionada con la enfermedad. El sistema construido bajo las hipótesis anteriores está dado por:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{R}}{d\tau} &= \bar{r} \left(1 - \frac{\bar{R}}{\bar{K}}\right) \bar{R} - \bar{a}\bar{F}\sqrt{\bar{R}}, \\ \frac{d\bar{F}}{d\tau} &= -\bar{m}\bar{F} + \bar{e}\bar{a}\bar{F}\sqrt{\bar{R}} - \bar{\lambda}\bar{F}\bar{G}, \\ \frac{d\bar{G}}{d\tau} &= -\bar{n}\bar{G} + \bar{\lambda}\bar{G}\bar{F}.\end{aligned}\tag{14}$$

La singularidad es removida mediante un cambio de variable:

$$\sqrt{\bar{R}} = \bar{P}, \quad \frac{d\bar{P}}{d\tau} = \frac{1}{2\sqrt{\bar{R}}} \frac{d\bar{R}}{d\tau}.$$

Aquí P puede ser interpretada como el número de presas en la frontera del rebaño. Dimensionalizando el modelo y haciendo los siguientes cambios de variable $t = \delta\tau$, las nuevas variables son $P(t) = \alpha\bar{P}(\tau)$, $F(t) = \beta\bar{F}(\tau)$, $G(t) = \gamma\bar{G}(\tau)$

y se tiene el modelo $PF\dot{G}$, dado por:

$$\begin{aligned}\dot{P} &= (1 - P^2)P - aF, \\ \dot{F} &= F(-m + eaP - \lambda G), \\ \dot{G} &= G(-n + \lambda F).\end{aligned}\tag{15}$$

Observe que el último término de la ecuación para \bar{R} llega a ser lineal después del cambio de variable.

Los equilibrios del sistema (cuando son factibles) son: extinción, únicamente presas, ambas especies sanas y coexistencia. $E_0 = (0, 0, 0)$, $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (\rho, \frac{\rho}{a}(1 - \rho^2), 0)$ y $E_3 = (P_3, \frac{h}{a}, \frac{ea}{\lambda}(P_3 - \rho))$.

P_3 solución de $f(P_3) = P_3 - P - h = 0$. Además, se necesita $\rho < 1$ y $P_3 > \rho$ para que E_2 y E_3 sean factibles.

Sean P_3^- y P_3^+ soluciones de $f(P_3)$. Entonces $P_3^- \in [0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ y $P_3^+ \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, 1]$, además, se tiene que satisfacer que

$$1 \geq P_3 \geq \rho,$$

donde $\rho := \frac{m}{ea}$ y $h := \frac{an}{\lambda}$.

De un análisis de estabilidad, se tiene que E_0 es inestable siempre.

E_1 es local y asintóticamente estable si $\rho > 1$.

E_2 es asintóticamente estable si $\rho > \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $h > \rho(1 - \rho^2)$.

Aplicando el criterio de Routh-Hurwitz en E_3 , se asegura la estabilidad si $P_3 > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Así que P_3^- es inestable y P_3^+ es estable. Los siguientes lemas describen la dinámica del modelo.

Lema 4.1. *La extinción en el sistema (14) nunca es posible. El equilibrio libre de depredadores es estable si $\rho > 1$. El equilibrio libre de enfermedad es estable si se satisfacen $\rho > \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $h > \rho(1 - \rho^2)$. La coexistencia con un estado endémico en los depredadores es asegurado por $P_3 > \frac{1}{\sqrt{3}}$.*

Lema 4.2. *El sistema (14) exhibe una bifurcación transcítica para $\rho > 1$, involucrando E_0 y E_1 . Para $\rho = \frac{1}{\sqrt{3}}$ va a una bifurcación de Hopf supercrítica en el equilibrio E_2 .*

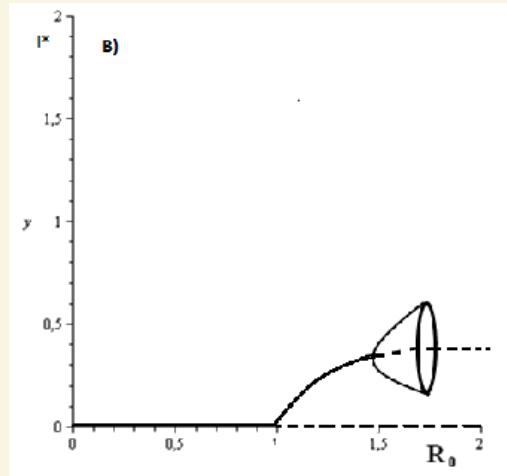


Figura 9: En E_3 , para $R_0 > 10$ existe una bifurcación de Hopf.

Lema 4.3. *En el estado endémico en coexistencia, E_3 , el sistema (14) admite una bifurcación de Hopf (Véase Figura 9).*

En este caso (Belvisi y Venturino [7]), presentaron un modelo ecoepidemiológico simple para interacciones del tipo presa-depredador en el que las presas se reúnen en manadas y una enfermedad afecta a los depredadores. El modelo (14) solo admite tres posibles equilibrios estables. Los depredadores son eliminados, E_1 ; la enfermedad es erradicada y las presas y los depredadores prosperan, E_2 ; y la enfermedad permanece endémica, con las tres subpoblaciones coexistiendo (E_3). El papel relevante del parámetro ρ , es evidente en este contexto. En resumen, para $\rho > 1$ los depredadores son eliminados, un resultado que concuerda con lo encontrado en los casos mostrados anteriormente cuando la enfermedad afecta a la presa. Para el valor crítico del parámetro $\rho = 1$ ocurre una bifurcación transcítica y los depredadores se establecen prósperamente en el ecosistema. Para disminuir aún más los valores y con un papel esencial desempeñado por el parámetro h , también la enfermedad se vuelve endémica. Las tres subpoblaciones coexisten en el equilibrio estable. Se han descubierto oscilaciones, en circunstancias adecuadas, en los límites de las regiones de estabilidad.

Cabe destacar que en comparación con el caso de otros modelos ecoepidemiológicos, cuando la presa se ve afectada por una enfermedad, aquí han podido caracterizar mejor el comportamiento del sistema; la razón esencial es la forma más simple de las condiciones de estabilidad para el equilibrio en coexistencia. Además de que la principal conclusión biológica consiste en que en este modelo

ecoepidemiológico con defensa grupal también la enfermedad tiene alguna influencia relevante, y por lo tanto el resultado de las trayectorias del sistema no se establecen simplemente por consideraciones demográficas. Estas consideraciones están en línea con los resultados clásicos en ecoepidemiología.

Gimmelli, G.*et al.* [12], analizan un modelo con defensa grupal de las presas, donde los depredadores experimentan un efecto de saciedad debido a la disponibilidad en grandes cantidades de las presas. Estos dos efectos están modelados con una función acotada. Resultados análogos a [7] son encontrados en este trabajo; además, se sugiere que el escenario de extinción puede ser una opción, ya que las presas pueden extinguirse en un tiempo finito, lo que llevaría a que los depredadores tiendan a extinguirse asintóticamente. El modelo se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{R}}{d\tau} &= \bar{r} \left(1 - \frac{\bar{R}}{K} \right) \bar{R} - \frac{\bar{a}\bar{F}\sqrt{\bar{R}}}{1 + \bar{T}\bar{a}\sqrt{\bar{R}}}, \\ \frac{d\bar{F}}{d\tau} &= -\bar{m}\bar{F} + e \frac{\bar{a}\bar{F}\sqrt{\bar{R}}}{1 + \bar{T}\bar{a}\sqrt{\bar{R}}} - \bar{\lambda}\bar{F}\bar{G}, \\ \frac{d\bar{G}}{d\tau} &= -\bar{n}\bar{G} + \bar{\lambda}\bar{G}\bar{F}. \end{aligned} \quad (16)$$

4.2 Enfermedades en presas defendiéndose en grupos puede beneficiar a los depredadores

En Bate y Hilker [6], se considera un modelo donde las presas tienen una enfermedad infecciosa. Se analizan dos efectos: el efecto debido a que las presas se defiendan en grupo contra los ataques de los depredadores y, además, se modela el tiempo de manipulación de las presas por los depredadores como una función lineal de la densidad de las presas. Este comportamiento es modelado usando una función de respuesta del tipo Holling IV:

$$\dot{S} = b(S + I) - mS - cS(S + I) - \beta(S, I) - \frac{aSP}{1 + ah_0(S + I) + ah_N(S + I)^2}, \quad (17)$$

$$\dot{I} = \beta(S, I) - (m + \mu)I - cI(S + I) - \frac{aIP}{1 + ah_0(S + I) + ah_N(S + I)^2},$$

$$\dot{P} = P \left(\frac{\gamma a(S + I)}{1 + ah_0(S + I) + ah_N(S + I)^2} - d \right).$$

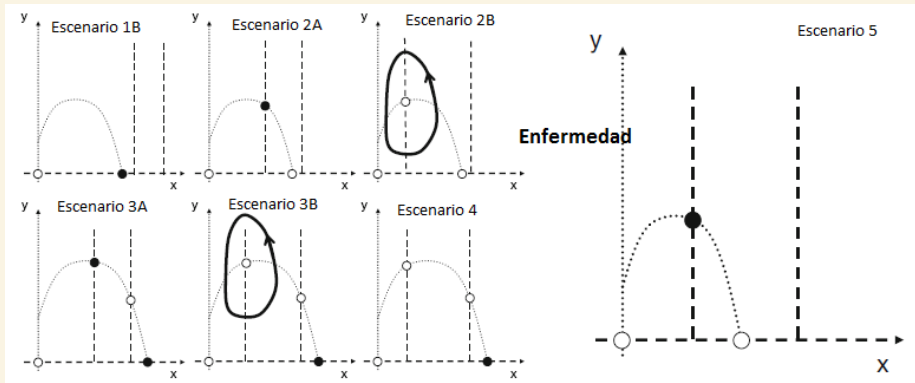


Figura 10: Retratos fase del modelo sin enfermedad (Escenarios 1B, 2A, 2B, 3A, 3B) y con enfermedad (Escenario 5B). 1B, un equilibrio estable con presas únicamente; 2A, un equilibrio estable con coexistencia; 2B, un equilibrio inestable con coexistencia rodeado de un ciclo límite estable de coexistencia (escenario 2B, arriba a la derecha); biestabilidad entre un equilibrio con coexistencia y un equilibrio con únicamente presas (Escenario 3A, parte inferior izquierda); biestabilidad entre un ciclo límite estable de coexistencia que rodea un equilibrio inestable y un equilibrio existiendo solamente presas (Escenario 3B, parte media inferior); y un equilibrio estable de únicamente presas con dos equilibrios inestables de coexistencia y sin ciclo límite (Escenario 4, abajo a la derecha) y coexistencia con enfermedad (Escenario 5).

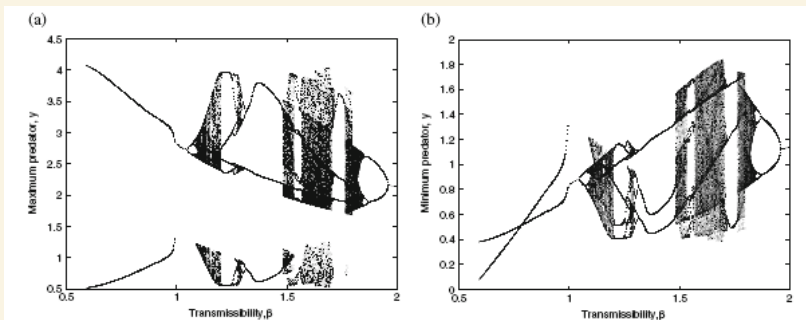


Figura 11: Para aproximadamente $\beta < 0,6$ los depredadores no pueden sobrevivir. En $\beta \approx 0,6$ un ciclo de periodo dos ocurre (con respecto a los depredadores). Una cascada de periodo doble ocurre para $\beta > 1$, resultando en caos.

En ausencia de la clase infecciosa, se obtienen los escenarios mostrados en la figura 10. Los escenarios 1 y 2 pueden ser llamados los casos donde la defensa en grupo es débil, dado que esos escenarios son posibles para una respuesta funcional del tipo Holling II (Rosenzweig-MacArthur model). En el escenario 3, la defensa en grupo es suficientemente fuerte para dominar la dinámica para densidades altas de presas. El escenario 4 significa que no hay coexistencia estable debido a que el ciclo límite desaparece después de colapsar con un punto silla (bifurcación homoclínica). Finalmente, en el escenario 5, se tiene coexistencia entre las tres clases. Esto significa que las oscilaciones usuales del modelo presa-depredador de Rosenzweig-MacArthur pueden no estar totalmente contenidas en las regiones donde la densidades de las presas sean suficientemente pequeñas para que la defensa grupal sea débil, y en cambio invade las regiones donde la defensa grupal domina. Utilizando una tasa de transmisión dependiente de la frecuencia, se tiene que si se reduce en las presas la capacidad de carga debido a la enfermedad esto puede beneficiar a los depredadores, tanto como este puede cambiar del escenario 3 al escenario 2. Este cambio es importante, ya que el escenario 3 implica biestabilidad involucrando un estado de existencia de únicamente presas, mientras que el escenario 2 implica que el depredador siempre existirá. En este caso, la enfermedad puede ayudar al depredador a sobrevivir bajo condiciones donde este no podría hacerlo sin la enfermedad, debido a densidades inmanejables de las presas. En el modelo con una tasa de transmisión denso-dependiente, se puede llegar a tener una dinámica más compleja (véase Figura 11). Por lo tanto, la defensa grupal tiende a inducir cambios catastróficos en la dinámica cualitativa.

5 Discusión y perspectivas futuras

En este trabajo se resumen algunos de los principales resultados de la ecoepidemiología. Estos resultados muestran desde comportamientos simples hasta complejos de las soluciones de algunos modelos ecoepidemiológicos. En esta revisión de modelos ecoepidemiológicos se mostró (analítica o numéricamente) que introducir efectos epidemiológicos a un modelo con solamente efectos demográficos, puede llegar a hacer impredecible el comportamiento de las poblaciones que están interactuando, debido a la aparición de comportamientos caóticos en las soluciones del sistema.

Una característica importante que subyace en algunos de los modelos analizados es que bajo algunas condiciones sobre los parámetros, las soluciones son cualitativamente análogas a las del modelo de Lotka-Volterra o al modelo

presa-depredador de Rosenzweig-MacArthur.

Por ejemplo, en algunos casos se muestra que puede existir coexistencia de las tres especies si se utiliza una incidencia estándar. En este caso, si la enfermedad afecta a las presas entonces los depredadores alcanzan un equilibrio menor y las presas, un equilibrio mayor que en el caso del modelo de Lotka-Volterra. En caso contrario, si la enfermedad afecta a los depredadores se alcanza un equilibrio menor para cada clase.

Si ahora se modela competencia entre especies y, además una de ellas es infecciosa, se muestra numéricamente que pueden coexistir las tres clases y que las soluciones son órbitas periódicas. O que se tiene el resultado del modelo presa-depredador. Además, se muestra que si los nuevos infectados son descritos por una incidencia estándar, se tienen resultados análogos, además de que existe un escenario en el que los individuos susceptibles a la enfermedad son los únicos que se extinguen, así que, si lo que interesa es erradicar la enfermedad, introducir una especie competidora es un error, independientemente de usar una incidencia estándar o una Ley de acción de masas. Por otro lado, si se tiene una relación simbiótica, y una de las especies es susceptible a una enfermedad infecciosa, se muestra que la infección beneficia a ambas poblaciones bajo algunas condiciones sobre los parámetros, lo cual puede pensarse que es contraintuitivo.

Por otra parte, se mostró que si las funciones de interacción C_i son del tipo Holling los comportamientos de las soluciones son más complejos. En algunos casos analizados en este trabajo aparece biestabilidad, triestabilidad, y bajo algunas condiciones sobre los parámetros se tiene caos de las soluciones a través de una cascada de duplicación de periodo.

Finalmente, se muestra que cuando se tiene un modelo del tipo presa-depredador en el que las presas son susceptibles a algún patógeno en particular y ellas se encuentran en grupos, esta infección puede beneficiar a los depredadores, ya que puede reducir la densidad de las presas a niveles más bajos, lo que hace más manejable el grupo para capturar presas y así beneficiarse los depredadores. Sin embargo, la extinción de todas las clases es una opción bajo algunas condiciones sobre los parámetros. Nótese que las soluciones de estos modelos también muestran comportamientos caóticos.

En resumen, a lo largo de esta revisión se puede observar que la dinámica entre presas y depredadores es afectada al introducirse una enfermedad infecciosa en una de las dos especies. En algunos casos, se observa un fenómeno de existencia de estados de equilibrio múltiples y hasta atractores extraños. Particularmente, aparece un fenómeno de biestabilidad o triestabilidad entre el equilibrio con una única población sobreviviendo y equilibrios en coexistencia con un estado endémico de la infección. En ese sentido, los mecanismos demográficos o

epidemiológicos que permiten la aparición de una biestabilidad o triestabilidad no son de todo claros, por lo que es de suma importancia hacer un análisis a fondo de los parámetros que pueden causar este fenómeno, y así plantear estrategias para controlar la densidad de población de las especies. Particularmente, una pregunta que surge de analizar los modelos presentados en este trabajo y que vale la pena ser respondida es: ¿la dinámica del modelo cambia si los nuevos nacimientos se dividen en individuos susceptibles o infectados? En ese sentido, no se ha analizado a profundidad la dirección de la bifurcación en parámetros umbrales, y de esa forma analizar si esta dirección beneficia a las poblaciones. Además, en todos los casos revisados el modelo epidemiológico *SIS* supone una tasa de recuperación constante, por lo que un caso a estudiar próximamente es analizar el comportamiento de modelos ecoepidemiológicos donde se tenga una tasa de recuperación no lineal como función de los individuos infectados, aunque lo estudiado sugiere que aparecerán dinámicas complejas. Finalmente, se podría analizar el efecto de los refugios de las presas en la dinámica de modelos ecoepidemiológicos y compararlo con el caso en que se tiene defensa grupal de las presas.

Bibliografía

- [1] Anderson, R.; May, R. The invasion, persistence and spread of infectious disease within animal and plant communities, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series B, Biological Sciences* 314 (1986), 533-570.
- [2] Bailey, N. *The Mathematical Theory of Infectious Diseases*, Hafner, 2nd ed., New York, 1975.
- [3] Bate, M. Mathematical models in eco-epidemiology, Thesis for the degree of Doctor of Philosophy of the University of Bath, (2013).
- [4] Bate, M.; Hilker, F. Predator-Prey oscillations can shift when diseases become endemic, *Journal of Theoretical Biology*, 316 (2013), 1-8.
- [5] Bate, M.; Hilker, F. Complex Dynamics in an Eco-epidemiological Model, *Bulletin Mathematical Biology*, 75 (2013), 2059-2078.
- [6] Bate, M.; Hilker, F. Disease in group-defending prey can benefit predators, *Theo. Ecol.*, vol. 7 (2014), 87-100.

- [7] Belvisi, S.; Venturino, E. An ecoepidemic model with diseased predator and prey group defense, *Simulation Modelling Practice and Theory*, 34, (2013), 144-155.
- [8] Bernulli, D. Essai d' une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir, *Mémoires de Mathématiques et de Physique Académie Royale des Sciences*, Paris (1760), 1-45.
- [9] Ferreri, L.; Venturino, E. Cellular automata for contact ecoepidemic processes in predator-prey systems, *Ecological Complexity*, 13 (2013), 8-20.
- [10] Genovert, M.; Negre, N.; Tavecchia, G.; Bistuer, A.; Parpal, L.; Oro, D. The Young, the Weak and the Sick: Evidence of Natural Selection by Predation, *PLoS One* 5(3) (2010), e9774. doi:10.1371/journal.pone.0009774.
- [11] Ghosh, K.; Samanta, S.; Biswas, S.; Rana, S.; ELmojtaba, I.; Kesh, D.; Chattopadhyay, J. Stability and bifurcation analysis of an eco-epidemiological model with multiple delays, *Nonlinear Studies*, 23 (2), (2016), 167-208.
- [12] Gimmelli, G.; Kooi, B.; Venturino, E. Ecoepidemic models with prey group defense and feeding saturation, *Ecological Complexity*, 22 (2015), 50-58.
- [13] Haderler, K.; Freedman, H. Predator-prey populations with parasitic infection", *Journal of Mathematical Biology*, 27 (1989), 609-631.
- [14] Hamer, W. Epidemic disease in England, *Lancet*, 1 (1906), 733-739.
- [15] Haque, M.; Venturino, E. The role of transmissible disease in the Holling-Tanner predator-prey model, *Theoretical Population Biology*, 70 (2006), 273-288.
- [16] Haque, M.; Venturino, E. An eco-epidemiological model with disease in predator: the ratio-dependent case, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 30 (2007), 1791-1809.
- [17] Haque, M.; Zhen, J.; Venturino, E. An ecoepidemiological predator-prey model with standard disease incidence, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 32 (2009), 875-898.
- [18] Hu, Z.; Teng, Z.; Jia, C.; Zhang, L.; Chen, X. Complex dynamical behaviors in a discrete eco-epidemiological model with disease in prey, *Advances in Difference Equations* (2014), 2014-265.

-
- [19] Kermack, W.; McKendrick, A. Contributions to the mathematical theory of epidemics I, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 115 (1927), 700-721.
- [20] Lafferty, K.; Morris, A. Altered behavior of parasitized killfish increases susceptibility to predation by bird final hosts, *Ecology* 77 (1996), 1390-1397.
- [21] McKendrick, A. Applications of mathematics to medical problems, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 44 (1926), 98-130.
- [22] Mech, L. The Wolf", *Natural History Press*, New York (1970).
- [23] Moore, J. *Parasites and the Behavior of Animals*, Oxford University Press, (2002).
- [24] Peterson, R.; Page, R. The rise and fall of Isle Royale wolves 1975-1986, *J. Mamm.*, 69(I) (1988), 89-99.
- [25] Ross, R. *The Prevention of Malaria*, Murray, 2nd ed., London, 1911.
- [26] Sarwardi, S.; Haque, M.; Venturino, E. Global stability and persistence in LG- Holling type II diseased predator ecosystems, *Journal of Biological Physics*, 37 (2011), 91-106.
- [27] Schaller, G. *The Serengeti Lion: A Study of Predator Prey Relations*, University of Chicago Press, Chicago, 1972.
- [28] Stiefs, D.; Venturino, E.; Feudel, U. Evidence of chaos in eco-epidemic model, *Mathematical Biosciences and Engineering*, 6 (2009), 855-871.
- [29] Su, M.; Hui, C.; Zhang, Y.; Li, Z. Spatiotemporal Dynamics of the Epidemic Transmission in a Predator-Prey System, *Bulletin of Mathematical Biology*, 70 (2008), 2195-2210.
- [30] Temple, S. Do predators always capture substandard individuals disproportionately from prey population?, *Ecology*, 68 (1987), 669-674.
- [31] Venturino, E. Influence of Disease on Lotka-Volterra Systems, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 24(1) (1994).
- [32] Venturino, E. The effects of diseases on competing species, *Math Biosc*, 174 (2001), 111-131.
- [33] Venturino, E. Epidemics in predator prey models: disease in predators, *IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine and Biology*, 19 (2002), 185-205.

- [34] Venturino, E. Eco-epidemic models with disease incubation and selective hunting, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234 (2010), 2883-2901.
- [35] Venturino, E. A minimal model for ecoepidemics with group defense, *Journal of Biological Systems*, 19 (2011), 763-785.
- [36] Venturino, E. Simple metaecoepidemic models, *Bulletin of Mathematical Biology*, 73 (2011), 917-950.
- [37] Venturino, E. How diseases affect symbiotic communities, *Mathematical Biosciences*, 206 (2007), 11-30.

Osuna, Osvaldo (*osvaldo@ifm.umich.mx*),
Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás
de Hidalgo, Edif. C-3, Ciudad Universitaria, C. P. 58040. Morelia, Mich.,
México.

Villavicencio-Pulido, Geiser (*j.villavicencio@correo.ler.uam.mx*),
División de Ciencias Biológicas y de la Salud, Depto. de Ciencias Ambientales,
Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Lerma. Av. Hidalgo
Poniente No. 46, Col. La Estación, 52006, Lerma de Villada, Edo. de México,
México.

Sistemas dinámicos

ALGEBRIZATION OF PLANAR VECTOR FIELDS *

Alcorta, A., Frías, M., Grimaldo, M., López, E. †

Abstract

We give a method to determine when a planar vector field F admits an associative and commutative algebra \mathbb{A} with unit, for which F is \mathbb{A} -algebrizable (Lorch-differentiable with respect to \mathbb{A}). We introduce the *quasi-algebrizable* vector fields, which are those vector fields F for which there exist scalar functions α , which we call *algebrizing factors*, in such a way that the products αF are algebrizable vector fields. We give conditions under which a planar vector field is quasi-algebrizable and the algebrizing factor and the inverse integrating factor are found.

Keywords: Analytic function theory in algebras, abstract differential equations, inverse integrating factor.

1 Introduction

In a paper published in 1893, Sheffers laid a foundation for a theory of analytic functions on algebras, see [7], [10], [17], [20], and [15]. Classical function theory can be extended to algebras (finite dimensional associative commutative unital algebras): the Cauchy Integral Theorem is satisfied, the Cauchy integral formula has an analogous version, the classical theorems on Taylor power series are easily established, a Laurent expansion may be defined in several disjoint regions in each of which it may define a different analytic function, and the generalized Cauchy-Riemann equations are defined and serve as a criterion for the analyticity. This theory, also known as Lorch analyticity, permits us to consider differential equations over algebras ([5], [16]), which can be used to solve a family of autonomous differential systems.

In this paper *algebra* means finite dimensional associative commutative unital algebra. We will say that a vector field F is *algebrizable* if F is Lorch-analytic for some algebra, and that F is \mathbb{A} -*algebrizable* if \mathbb{A} is an algebra with respect to the which F is Lorch-analytic.

*2000, Classifications numbers AMS 15B33, 12H20, 34C07.

†Universidad Autónoma de Nuevo León / Universidad de Sonora / Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

An *inverse integrating factor* is the multiplicative inverse of an integrating factor of a vector field. When an inverse integrating factor for a planar vector field is known, a first integral can be obtained (see [11]), whose level sets determine the phase portrait. The inverse integrating factors play an important role in the center problem, the 16th Hilbert problem, integrability, symmetries, bifurcations and others topics, see [1], [12], [13], [14] and references therein. Every algebrizable vector field has associated a set of infinitesimal Lie symmetries, it is defined by all the products with respect to the algebra of the vector field by the non zero constants of the algebra. The knowledge of a one parameter group of Lie symmetries of a vector field reduces by one the dimension of the corresponding system of autonomous ordinary differential equations, see [6]. For the case of planar systems, the knowledge of a non-trivial infinitesimal Lie symmetry of the system permits us to construct an inverse integrating factor.

The algebrizability of a vector field with respect to a given algebra \mathbb{A} is characterized by the generalized Cauchy-Riemann equations, which is a set of partial differential equations associated to \mathbb{A} , see [15]. In this paper conditions under which a given planar vector field F admits an algebra with respect to which it is \mathbb{A} -algebrizable are given. In this case, the product of the algebra \mathbb{A} is found. The expression of all the quadratic algebrizable planar vector fields is given. Also, we give conditions under which F admits a scalar function $\alpha(x_1, x_2)$, which we call *algebrizing factor*, in such a way that αF is an algebrizable vector field. In this case we say that the corresponding vector field F is *quasi-algebrizable* and the expression of $\alpha(x_1, x_2)$ is given.

Geometrical and dynamical properties of complex analytic vector fields are given in [18]. Some of these properties can be extended to algebrizable vector fields by using some results of this paper. In [9] is done the following: for every algebrizable planar vector field F on some algebra \mathbb{A} , a flat Riemannian metric g for the which $F_1 = e_1 F$ and $F_2 = e_2 F$ define an orthonormal frame, where $e_1 F$ and $e_2 F$ denote the product in \mathbb{A} and $\{e_1, e_2\}$ is the standard basis of \mathbb{R}^2 . The integral curves of F_1 and F_2 are unitary geodesics of g . We also give two gradient vector fields G_1 and G_2 , where $G_1 \perp F_2$ and $G_2 \perp F_1$ with respect to the natural Riemannian metric.

We say that F is Fréchet-differentiable over $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ if F is differentiable in the usual sense as a function from $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ to \mathbb{R}^2 . Consider the planar autonomous differential system

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \quad (1)$$

where $\dot{x}_1 = dx_1/dt$, $\dot{x}_2 = dx_2/dt$, and $F = (f_1, f_2) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is Fréchet-differentiable in the open set Ω , see [8]. This system is equivalent to the vector

field $F = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$.

An autonomous *differential equation over an algebra* \mathbb{A} is denoted by $\frac{d\xi}{d\tau} = H(\xi)$, where $H : \Omega \subset \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ is a function defined in an open set Ω . For every point $\xi_0 \in \Omega$, a solution to the equation through ξ_0 at time τ_0 consists of an \mathbb{A} -*differentiable* function $\xi : N(\tau_0) \subset \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ defined in a neighborhood $N(\tau_0)$ of τ_0 , with $\xi(\tau_0) = \xi_0$, whose \mathbb{A} -*derivative* $d\xi/d\tau$ with respect to \mathbb{A} satisfies $\frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = H(\xi(\tau))$ for all $\tau \in N(\tau_0)$. A theorem of existence and uniqueness of solutions for differential equations over algebras is proved in [16], and a technique for visualization of solutions is given in [5]. Similarly, the non-autonomous differential equations over algebras can be defined.

If a differential system as (1) can be written by a differential equation over an algebra \mathbb{A} of the form $\frac{d\xi}{d\tau} = H(\xi)$ with solution $\xi(\tau)$, then $(x_1(t), x_2(t)) = \xi(te)$ is a solution of the system, where e is the unit of \mathbb{A} . Thus, some differential systems having the form (1) can be solved by using differential equations over algebras. The classical differential equation $dw/dt = w^2$ has solutions $w(t) = -(t + c)^{-1}$. For example, the planar differential system

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2, \quad \frac{dx_2}{dt} = 3x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1^2$$

can be written as the differential equation $\frac{d\xi}{d\tau} = \xi^2$ over the algebra \mathbb{A} defined by the linear space \mathbb{R}^2 endowed with the product

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) := (3x_1y_1 + (x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2), 3x_2y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1 - x_1y_1)).$$

The solutions ξ are given by $\xi(\tau) = -(\tau + c)^{-1}$; hence the solutions of the planar system are given by $(x_1(t), x_2(t)) = \xi(te)$, where e denotes the unit of \mathbb{A} . Using the first fundamental representation of \mathbb{A} (see Section 1) the following expression for the solution $(x_1(t), x_2(t))$ of the system is obtained:

$$(x_1(t), x_2(t)) = \left(\frac{-t - b}{4(2t + a + b)^2}, \frac{-t - a}{4(2t + a + b)^2} \right), \quad (x_1(0), x_2(0)) = \frac{-(b, a)}{4(a + b)^2}.$$

Algebrization of planar systems of non-autonomous ordinary differential equations is considered in [3]. Given a planar system of non-autonomous ordinary differential equations $\frac{dw}{dt} = F(t, w)$, conditions are given for the existence of an associative commutative unital algebra \mathbb{A} with unit e and a function $H : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on an open set Ω , such that $F(t, w) = H(te, w)$ and the maps $H_1(\tau) = H(\tau, \xi)$ and $H_2(\xi) = H(\tau, \xi)$ are Lorch-differentiable with respect to \mathbb{A} for all $(\tau, \xi) \in \Omega$, where τ and ξ represent variables in \mathbb{A} . Under

these conditions the solutions $\xi(\tau)$ of the non-autonomous differential equation $\frac{d\xi}{d\tau} = H(\tau, \xi)$ over \mathbb{A} define solutions $(x_1(t), x_2(t)) = \xi(te)$ of the planar system.

Algebrizability of three-dimensional vector fields is considered in [4]. Conditions are given under which a three-dimensional vector field admits an algebra with respect to which it is Lorch differentiable, and in the case of Lorch-differentiability the algebra is found.

In section 4 we recall preliminaries of unital, associative, and commutative linear algebras and Lorch differentiability. In section 3 we define algebrizability of vector fields and we give a method to determine the algebrizability of planar vector fields. In section 4 we give infinitesimal Lie symmetries for algebrizable planar vector fields and we give inverse integrating factors for quasi-algebrizable planar vector fields. In section 5 we introduce the quasi-algebrizable vector fields and we give conditions under which a planar vector field is quasi-algebrizable.

2 Algebras and Lorch-analiticity

2.1 Algebras

In this subsection we introduce the definition of what it means for us algebra, see [14].

Definition 2.1. An *algebra* is the linear space \mathbb{R}^2 endowed with a bilinear product $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ denoted by $(x, y) \mapsto xy$, which is associative and commutative $x(yz) = (xy)z$ and $xy = yx$ for all $x, y, z \in \mathbb{A}$, and there exists a unit $e = e_{\mathbb{A}} \in \mathbb{A}$, satisfying $ex = xe = x$ for all $x \in \mathbb{A}$.

An element $a \in \mathbb{A}$ is called *regular* if there exists $a^{-1} \in \mathbb{A}$ called *inverse* of a such that $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$. If $a \in \mathbb{A}$ is not regular, then a is called *singular*. If $a, b \in \mathbb{A}$ and b is regular, the quotient a/b means $a \cdot b^{-1}$.

If $\beta = \{e_1, e_2\}$ is the standard basis of \mathbb{R}^2 and \mathbb{A} is an algebra, the product between the elements of β is given by $e_i e_j = \sum_{k=1}^2 c_{ijk} e_k$, where $c_{ijk} \in \mathbb{R}$ for $i, j, k \in \{1, 2\}$ are called *structure constants* of \mathbb{A} associated to β . The *first fundamental representation* of \mathbb{A} associated to β is the isomorphism $R : \mathbb{A} \rightarrow M(2, \mathbb{R})$ defined by $R : \beta_i \mapsto R_i$ where R_i , is the matrix with entry (j, k) , that is, c_{ikj} , for $i = 1, 2$.

2.2 Differentiability on algebras

The Jacobian matrix of $F = (f_1, f_2) : \Omega \subset \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ will be denoted by $JF(x_1, x_2)$, that is,

$$JF(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

where every partial derivative is evaluated in (x_1, x_2) .

Definition 2.2. Let \mathbb{A} be an algebra and $F : \Omega \subset \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$, where Ω is an open set. We say that F is \mathbb{A} -differentiable or \mathbb{A} -algebrizable on Ω if there exists a function $F' : \Omega \subset \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ called \mathbb{A} -derivative of F on Ω satisfying

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|F(a+h) - F(a) - F'(a)h|}{|h|} = 0,$$

for all $a \in \Omega$, where $F'(a)h$ denotes the product in \mathbb{A} of $F'(a)$ with h .

A vector field $F : \Omega \subset \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ is \mathbb{A} -differentiable on Ω if and only if the usual Jacobian matrix $JF(x_1, x_2)$ of F is contained in the image of first fundamental representation of \mathbb{A} for all $(x_1, x_2) \in \Omega$. The \mathbb{A} -differentiability satisfies most of the usual properties of the derivative of functions of a complex variable, see [2].

2.3 Generalized Cauchy-Riemann equations

Given an algebra \mathbb{A} with structure constants c_{ijk} , the set of partial differential equations

$$\sum_{i=1}^2 c_{iks} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^2 c_{ijs} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \quad (2)$$

appears in [10], p. 646, and is called *generalized Cauchy-Riemann equations* of \mathbb{A} . The classical Cauchy-Riemann equations of the complex field can be seen at [2]. A function $F = (f_1, f_2)$ is \mathbb{A} -differentiable if and only if F satisfies equations (13).

3 Algebrizability of planar vector fields

Definition 3.1. Let \mathbb{A} be an algebra. We say that the *differential system* (1) is \mathbb{A} -algebrizable if F is \mathbb{A} -algebrizable.

We use the notations $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $Tr(\cdot)$ for inner product and trace of a matrices in $\mathbb{M}(2, \mathbb{R})$, respectively.

In the following proposition is given a characterization of the algebrizability of planar vector fields.

Proposition 3.2. *Let $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be Fréchet-differentiable on Ω . Then, F is algebrizable if and only if there exists a pair of matrices $B_1, B_2 \in \mathbb{M}(2, \mathbb{R})$ linearly independent, such that*

$$\langle B_i, JF(x_1, x_2) \rangle = 0, \quad Tr(B_i) = 0, \quad i = 1, 2,$$

for all $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Proof. The proof is direct of the Corollary of the Theorem 2 in [15]. □

The following proposition gives another characterization of the algebrizability of a planar vector fields.

Proposition 3.3. *Let $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be Fréchet-differentiable over an open set Ω . Then, F is algebrizable if and only if for some one of the three types*

$$I) \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

$$II) \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$III) \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

where a and b are real constants, we have $\langle B_i, JF(x_1, x_2) \rangle = 0$, for $i = 1, 2$, and for all $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Proof. The set of matrices $B \in M(2, \mathbb{R})$ satisfying $\langle B, JF(x_1, x_2) \rangle = 0$ and $Tr(B) = 0$ defines a linear space \mathcal{L} . Thus, any linear combination of elements of \mathcal{L} remains in \mathcal{L} . Suppose that F is Algebrizable, then by Proposition 3.2, there are a pair of matrices $B_1, B_2 \in \mathcal{L}$, which are linearly independent. So, dimension $dim(\mathcal{L}) \geq 2$. These matrices B_1, B_2 can be considered as two vectors $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$, which are linearly independent. We can write these vectors as a matrix of 2×4 . Then, under a finite number of elementary row operations in the matrix

$$W = \begin{pmatrix} h & l & c & -h \\ d & e & f & -d \end{pmatrix},$$

we have the following cases:

- Case I: if the submatrix

$$M_1 = \begin{pmatrix} h & l \\ d & e \end{pmatrix}$$

is invertible, by multiplying M_1^{-1} with W by the left, W is equivalent to

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -1 \\ 0 & 1 & b & 0 \end{pmatrix}$$

and it follows that

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

- Case II: if the submatrix M_1 of the case I is singular and the submatrix

$$M_2 = \begin{pmatrix} c & -h \\ f & -d \end{pmatrix}$$

is invertible, by multiplying M_2^{-1} with W by the left and since M_1 is singular, W is equivalent to

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

and it follows that B_1 and B_2 can be taken by

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Case III: if we are not in cases I or II, then W is equivalent to

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

and it follows that

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Therefore, starting from a pair of matrices B_1, B_2 , we obtain a pair of matrices B_1, B_2 of one and only one of the types I, II, or III which satisfy $\langle B_i, JF(x_1, x_2) \rangle = 0$, and $Tr(B_i) = 0$, $i = 1, 2$, for all $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Now suppose the existence of a pair of matrices of one of the types I, II, or III satisfying $\langle B_i, JF(x_1, x_2) \rangle = 0$, for $i = 1, 2$, and for all $(x_1, x_2) \in \Omega$, then this matrices are linearly independent and satisfy $Tr(B_i) = 0$, for $i = 1, 2$. Thus by Proposition 3.2, we finish the proof. \square

The following theorem gives a criterion to determine the algebrizability of vector fields and a method for constructing the corresponding algebras.

Theorem 3.4. *Let $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be Fréchet-differentiable on the open set Ω . Then F is algebrizable if and only if \mathbb{R}^2 endowed with the algebra structure \mathbb{A} given by some of the following products:*

$$I) \begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 \\ e_2 & e_2 & -be_1 + ae_2 \end{array}, \quad II) \begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & -ae_1 & e_1 \\ e_2 & e_1 & e_2 \end{array}, \quad III) \begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & 0 \\ e_2 & 0 & e_2 \end{array}, \quad (3)$$

is such that F is \mathbb{A} -differentiable. Moreover, F is algebrizable with respect to an algebra structure given by a product of the type I, II, or III in (3) if and only if $\langle B_i, JF(x_1, x_2) \rangle = 0$, for a pair of matrices B_1, B_2 of the corresponding type I, II, or III, given in Proposition 3.3, for all $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Proof. By making the inner products of the pair of matrices of the type I with $JF(x_1, x_2)$, we have the following equations:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + a \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + b \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0,$$

then

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + a \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -b \frac{\partial f_2}{\partial x_1},$$

from which we obtain that $JF(x_1, x_2)$ satisfies the equality

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & a \end{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}.$$

By the Corollary of the Theorem 2 of [15], we have that the space \mathbb{R}^2 is an algebra \mathbb{A} , whose first fundamental representation associated to the canonical base of \mathbb{R}^2 is defined by

$$R(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

The product given in the table I of (3) corresponds to this algebra. Moreover, F is \mathbb{A} -differentiable. Thus, the proof is done when there exists a pair of matrices of the type I satisfying the hypothesis of the theorem.

By making the inner product of the pair of matrices of the type II with $JF(x_1, x_2)$, we have the following equations

$$: \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + a \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0,$$

then

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -a \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0,$$

from which we obtain that $JF(x_1, x_2)$ satisfies

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_2}.$$

By the Corollary of the Theorem 2 in [15], we have that the space \mathbb{R}^2 is an algebra \mathbb{A} , whose first fundamental representation associated to the canonical base of \mathbb{R}^2 is defined by

$$R(e_1) = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

The product given in the table II of (3) corresponds to this algebra. Moreover, F is \mathbb{A} -differentiable. Thus, the proof is done when there exists a pair of matrices of the type II satisfying the hypothesis of the theorem.

If we have the existence of a pair of matrices as in the third case, then

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0.$$

So, $f_1(x_1, x_2)$ does not depend on x_2 and $f_2(x_1, x_2)$ does not depend on x_1 . In this case we have that F is \mathbb{A} -differentiable with respect to the algebra given in the table III of (3). Thus, the proof is done when there exists a pair of matrices of the type III satisfying the hypothesis of the theorem. \square

The third case in last proof gives a slight position to Corollary of the Theorem 2 of [15]. In this case the Jacobian matrix $JF(x_1, x_2)$ cannot be expressed by

$$JF(x_1, x_2) = M_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + M_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1},$$

either by

$$JF(x_1, x_2) = M_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + M_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2},$$

for M_1 and M_2 constant matrices, then result of Theorem 2 of [15] does not apply, but in this case F still been Algebrizable. F is \mathbb{A} -differentiable with respect to the algebra \mathbb{A} defined by a product of the type III of (3).

If the given vector field is not of the form $F(x_1, x_2) = c(x_1, x_2) + (c_1, c_2)$, then there exists a unique pair of matrices satisfying Theorem 3.4.

We give an example of an algebrizable planar differential system.

Example 3.5. Lets consider the system of differential equations

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 - 2x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1x_2 + 2x_2^2, \end{aligned}$$

which is associated to the vector field $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ defined by

$$F(x_1, x_2) = (x_1^2 - 2x_2^2, 2x_1x_2 + 2x_2^2)$$

and whose Jacobian matrix is

$$JF(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -4x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}.$$

The matrices

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

are orthogonal to the Jacobian matrix $JF(x_1, x_2)$, that is $\langle B_i, JF(x_1, x_2) \rangle = 0$, for $i = 1, 2$, and for all $(x_1, x_2) \in \Omega$. Thus, F is \mathbb{A} -algebrizable with respect to the algebra \mathbb{A} , which is \mathbb{R}^2 with the product of the type I of (3) with $a = b = 2$, where in this case $e = e_1$ is the unit of \mathbb{A} . The differential equation of a single variable over the corresponding algebra is given by $\frac{d\xi}{d\tau} = \xi^2$.

All the planar linear differential systems are algebrizable. The following example gives all the planar quadratic differential systems of autonomous ordinary differential equations which are algebrizable.

Example 3.6. The planar quadratic differential systems which are algebrizable have one of the following expressions:

1. If the system is algebrizable with an algebra with a product of the type I given in (3) with constants a and b ,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_0 + (b_2 - ab_1)x_1 - bb_1x_2 + \left(\frac{1}{2}b_4 - ab_3\right)x_1^2 - 2bb_3x_1x_2 - \frac{1}{2}bb_4x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2 + \left(\frac{1}{2}ab_4 - bb_3\right)x_2^2, \end{aligned}$$

where $a, b, a_0, b_0, b_1, \dots, b_4$ are real constants. The differential equation of a single variable over the corresponding algebra is given by

$$\frac{d\xi}{d\tau} = (a_0e_1 + b_0e_2) + ((b_2 - ab_1)e_1 + b_1e_2)\xi + \left(\left(\frac{1}{2}b_4 - ab_3 \right) e_1 + b_3e_2 \right) \xi^2.$$

2. If the system is algebrizable with an algebra with a product of the type II given in (3) with constant a ,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 - \frac{1}{2}aa_3x_1^2 + a_3x_1x_2 + a_4x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= b_0 + (a_1 + aa_2)x_2 + \left(\frac{1}{2}a_3 + aa_4 \right) x_2^2, \end{aligned}$$

where $a, b_0, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ are real constants. The differential equation of a single variable over the corresponding algebra is given by

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= (a_0e_1 + b_0e_2) + (a_2e_1 + (a_1 + aa_2)e_2)\xi \\ &+ \left(a_4e_1 + \left(\frac{1}{2}a_3 + aa_4 \right) e_2 \right) \xi^2. \end{aligned}$$

3. If the system is algebrizable with an algebra with the product of the type III given in (3),

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_0 + a_1x_1 + a_3x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= b_0 + b_2x_2 + b_3x_2^2, \end{aligned}$$

where a_i and b_i are real constants for $i = 0, 1, 2$. The differential equation of a single variable over the corresponding algebra is given by

$$\frac{d\xi}{d\tau} = (a_0e_1 + b_0e_2) + (a_1e_1 + b_2e_2)\xi + (a_3e_1 + b_3e_2)\xi^2.$$

4 Inverse integrating factors and infinitesimal Lie symmetries

4.1 Inverse integrating factor

Lie theory is a classical tool in the solutions of differential equations [10].

Definition 4.1. A function $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is said to be an *inverse integrating factor* of (1) if it is not locally null and satisfies the partial differential equations:

$$f_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) V. \quad (4)$$

That is, an inverse integrating factor of (1) is a non-trivial solution of the partial differential equation (4).

4.2 Commuting vector fields

Suppose that all functions considered in this section are C^2 in the usual sense.

Definition 4.2. The *Lie Bracket* $[F, G]$ of two vector fields F and G defined on $U \subset \mathbb{R}^2$ is the vector field $[F, G] := F(G) - G(F)$, that is,

$$[F, G]_j := \sum_{i=1}^2 \left(f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \quad (j = 1, 2), \quad (5)$$

where $F = f_1 \partial_{x_1} + f_2 \partial_{x_2}$ and $G = g_1 \partial_{x_1} + g_2 \partial_{x_2}$, where $\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$ for $j = 1, 2$.

Definition 4.3. It is say that F and G *commute* if $[F, G] \equiv 0$.

One can prove that (5) is equivalent to the equality

$$DF(G) - DG(F) = 0, \quad (6)$$

where D denotes the Fréchet differentiation. Then (5) is equivalent to the equality

$$DF(x)(G(x)) = DG(x)(F(x))$$

for all $x \in U$.

4.3 Infinitesimal symmetries of algebrizable vector fields

Every vector field F which is \mathbb{A} -algebrizable commute with aF for each $a \in \mathbb{A}$, as we show in the following theorem:

Theorem 4.4. *Let F be a \mathbb{A} -algebrizable vector field defined on $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, then for each $a \in \mathbb{A}$ the vector field $G := aF$ commute with F , that is, the Lie Bracket (5) is the zero vector field.*

Proof. By the properties of the derivative of Fréchet and the product rule by a constant for the \mathbb{A} -differential, we have $[DF]G = [DG]F$. \square

The following corollary gives inverse integrating factors for algebrizable planar systems.

Corollary 4.5. *For an \mathbb{A} -algebrizable vector field $F = f_1\partial_{x_1} + f_2\partial_{x_2}$, we have that V is an inverse integrating factor in each one of the following cases:*

1. $V = f_1^2 + af_1f_2 + bf_2^2$ if \mathbb{A} has a product of the type I of (3) with constants a and b ,
2. $V = af_1f_2 - f_2^2$ if \mathbb{A} has a product of the type II of (3) with constant a , and
3. $V = f_1f_2$ if \mathbb{A} has the product of the type III of (3).

Proof. In the respective cases $G = Fe_2$, $G = Fe_1$ y $G = Fe_2$ are infinitesimal Lie symmetries of F , thus we obtain the result. \square

A converse of Theorem 4.4 is given in the following result:

Theorem 4.6. *Let F be a \mathbb{A} -algebrizable vector field defined in the region $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, such that F has image in the regular set of \mathbb{A} . Then, every \mathbb{A} -algebrizable vector field G commuting with F has the form $G = aF$ for some constant $a \in \mathbb{A}$.*

Proof. Let G be an \mathbb{A} -algebrizable vector field commuting with F , then the equality (6) gives $DG(x)F(x) = DF(x)G(x)$, where $[DG(x)]F(x)$ and $[DF(x)]G(x)$ denote linear transformations $DG(x)$ and $DF(x)$ applied to $F(x)$ and $G(x)$. Since F and G are algebrizable, we have $G'(x)F(x) = F'(x)G(x)$, where $G'(x)F(x)$ and $F'(x)G(x)$ denote the products of $G'(x)$ with $F(x)$, and $F'(x)$ with $G(x)$ with respect to \mathbb{A} , respectively. Thus, $G'(x)F(x) - F'(x)G(x) = 0$.

Since \mathbb{A} -differentiability satisfies the usual rules of differentiation, in particular the quotient rule is satisfied, then

$$\left(\frac{G}{F}\right)'(x) = \frac{G'(x)F(x) - F'(x)G(x)}{(F(x))^2} = 0,$$

for all $x \in \Omega$. Since $[D(G/F)(x)](v) = \left(\frac{G}{F}\right)'v$, we have that the Fréchet differential of G/F satisfies $D(G/F)(x) = 0$ for all $x \in \Omega$. This implies that G/F is a constant function on Ω . Thus, $G/F \equiv a_0$ for some $a_0 \in \mathbb{A}$, that is, $G = a_0F$. Then, $G = a_0F$ for some $a_0 \in \mathbb{A}$. \square

5 Algebrizing factor

Definition 5.1. We say that the system (1) is *quasi-algebrizable* if there exists a Fréchet-differentiable scalar function $\alpha = \alpha(x_1, x_2)$, called *algebrizing factor*, such that the function $F = \alpha(f_1, f_2)$ is algebrizable.

The following theorem gives conditions in order to ensure that differential system (1) is quasi-algebrizable with respect to an algebra with a type I product given in (3).

Theorem 5.2. Let $h(x_1, x_2)$ be defined by

$$h = \frac{-f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - (af_1 + bf_2) \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_2}}{f_1^2 + af_1 f_2 + bf_2^2}. \quad (7)$$

Suppose the existence of constants a and b , such that h has an antiderivative $H(x_1, x_2)$ with respect to x_1 satisfying

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} = \frac{-bf_2 h - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - b \frac{\partial f_2}{\partial x_1}}{f_1}, \quad (8)$$

then $\alpha(x_1, x_2) = e^{H(x_1, x_2)}$ is an algebrizing factor for the system (1), and the corresponding algebra has a product of the type I given in (3) with constants a and b .

Proof. From equality (8), we have

$$\frac{\partial(\alpha f_1)}{\partial x_2} = -b \frac{\partial(\alpha f_2)}{\partial x_1}.$$

From equalities (7) and (8), we obtain

$$\frac{\partial(\alpha f_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial(\alpha f_1)}{\partial x_1} + a \frac{\partial(\alpha f_2)}{\partial x_1}.$$

That is, $(\alpha f_1, \alpha f_2)$ is algebrizable with respect to an algebra with a product of the type I given in (3). \square

Example 5.3. Consider the system

$$\dot{x}_1 = \frac{x_1}{x_2} - 1, \quad \dot{x}_2 = \frac{2x_1}{x_1 + x_2},$$

then $f_1(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2} - 1$ and $f_2(x_1, x_2) = \frac{2x_1}{x_1+x_2}$. Taking $a = 0$ and $b = 1$, we have that $h(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1+x_2}$. The antiderivative $H(x_1, x_2) = \log|x_1+x_2| + \log|x_2|$ of h satisfies the equation (8), then

$$\alpha(x_1, x_2) = e^{H(x_1, x_2)} = x_2(x_1 + x_2)$$

is an algebrizing factor of the system. Thus

$$\begin{aligned} \alpha(x_1, x_2)(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) &= x_2(x_1 + x_2) \left(\frac{x_1}{x_2} - 1, \frac{2x_1}{x_1 + x_2} \right) \\ &= (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2). \end{aligned}$$

Since $a = 0$ and $b = 1$, we have that $\alpha(f_1, f_2)$ is differentiable with respect to the complex algebra (the algebra defined by the product of the complex field \mathbb{C}). Evaluating $\alpha(f_1, f_2)$ along $te = (t, 0)$ where e is the identity in \mathbb{C} , we obtain that $\alpha(t, 0)(f_1(t, 0), f_2(t, 0)) = (t^2, 0) = t^2(1, 0)$. Thus,

$$\alpha(x_1, x_2)(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) = (x_1, x_2)^2$$

with respect to the product of \mathbb{C} .

The following theorem gives conditions in order to ensure that differential system (1) is quasi-algebrizable with respect an algebra with a product of the type II given in (3):

Theorem 5.4. *Let $h(x_1, x_2)$ be defined by*

$$h = \frac{f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + a \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - a f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}}{a f_1 f_2 - f_2^2}. \quad (9)$$

Suppose that there exists a constant a , such that h has an antiderivative $H(x_2)$ (does not depending on x_1) and define $g_1(x_2) = e^{H(x_2)}$, then

$$\alpha(x_1, x_2) = \frac{g_1(x_2)}{f_2(x_1, x_2)}$$

is an algebrizing factor for the system (1), and the corresponding algebra has a product of the type II given in (3) with constant a .

Proof. If $\alpha(x_1, x_2) = \frac{g_1(x_2)}{f_2(x_1, x_2)}$, we have

$$\frac{\partial(\alpha f_2)}{\partial x_1} = 0.$$

From equality (9), we obtain

$$\frac{\partial(\alpha f_1)}{\partial x_1} + a \frac{\partial(\alpha f_1)}{\partial x_2} - \frac{\partial(\alpha f_2)}{\partial x_2} = 0.$$

That is, $(\alpha f_1, \alpha f_2)$ is algebrizable with respect to an algebra having a product of the type II given in (3). \square

Quasi-algebrizability of differential system (1) with respect to the algebra with the type III product given in Theorem 3.4, is trivial. It is needed the existence of functions $\beta = \alpha(x_1, x_2)$, f and g , such that

$$f_1(x_1, x_2) = \beta(x_1, x_2)f(x_1), \quad f_2(x_1, x_2) = \beta(x_1, x_2)g(x_2).$$

In this case the algebrante factor $\alpha(x_1, x_2)$ is given by $\alpha(x_1, x_2) = \frac{1}{\beta(x_1, x_2)}$.

The following corollary gives the inverse integrating factors for quasi-algebrizable vector fields F with algebrante factor α .

Corollary 5.5. *Consider a vector field $F = f_1\partial_{x_1} + f_2\partial_{x_2}$ with algebrizing factor $\alpha(x_1, x_2)$, then we have that V is an inverse integrating factor in each one of the following cases:*

1. $V = \alpha f_1^2 + a\alpha f_1 f_2 + b\alpha f_2^2$ if αF is algebrizable with respect to an algebra with a type I product given in (3) with constants a and b ,
2. $V = a\alpha f_1 f_2 - \alpha f_2^2$ if αF is algebrizable with respect to an algebra with a type II product given in (3) with constant a , and
3. $V = \alpha f_1 f_2$ if αF is algebrizable with respect to the algebra with the type III product given in (3).

Conflict of interests: The authors declare that there is no conflict of interests in what involves this text. The issues discussed in this paper do not have any secondary interest for any of the authors. The authors declare having no financial affiliation with any organization regarding the material discussed here.

Bibliography

- [1] Ahlfors, L. *Complex Analysis*. McGraw-Hill International Book Company (1979).
- [2] Al-Dosary, K. Inverse integrating factor for classes of planar differential systems. *Int. J. of Math. Analysis*, 4, n. 29 (2010), 1433-1446.

-
- [3] M. A. Alcorta-García, M. E. Frías-Armenta, M. E. Grimaldo-Reyna, and E. López-González, *Algebrization of Nonautonomous Differential Equations*. J. Appl. Math., Vol. 2015 (2015),10.
- [4] M. A. Alcorta-García, M. E. Frías-Armenta, M. E. Grimaldo-Reyna, and E. López-González, *Algebrizability of vector fields in the space*. AVANZA-UACJ, Vol. 2015 (2015), 13.
- [5] Alvarez, A., Frías, A., Martín, E., López, E., and Yee, C. On Solving Systems of Autonomous Ordinary Differential Equations by Reduction to a Variable of an Algebra. *Int. J. Math. Math. Sci.*, Article ID 753916, 21 p. (2012).
- [6] V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag (1955).
- [7] E. Blum, *Theory of Analytic Functions in Banach Algebras*. Springer-Verlag, Vol. 78, No. 2 (1955), 343-370.
- [8] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [9] M. E. Frías-Armenta, and E. López-González, *Geometry and dynamic of algebrizable planar vector fields*. In preparation.
- [10] A. Cohen, An Introduction to the Lie Theory of One-Parameter Groups with Applications to the Solution of Differential Equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 18 (1912), No. 10, 514-515. <http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183421829>.
- [11] I. Garcia, and M. Grau, A survey on the inverse integrating factor. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 9, N. 1-2 (2010), 115-166.
- [12] H. Giacomini, J. Llibre, and M. Viano, On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles. *Nonlinearity*, 9 (1996), 501-516.
- [13] J. Chavarriga, J. Giné, Integrable systems via inverse integrating factor. *Extracta Math.*, Vol. 13 (1998), 41-60.
- [14] J. Chavarriga, H. Giacomini, J. Giné, J. Llibre, Darboux integrability and the inverse integrating factor. *J. Diff. Equations*, Vol. 194 (2003), 116-139.
- [15] P. Ketchum, Analytic Functions of Hypercomplex Variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 30 (1928), 641-667.

- [16] E. López-González, Differential Equations over Algebras. *Adv. Appl. Math. Sci.* 8, No. 2, 189-214 (2011).
- [17] E. Lorch, The Theory of Analytic Functions in Normed Abelian Vector Rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 54, No. 3 (1943), 414-425.
- [18] J. Muciño-Raymundo, Complex structures adapted to smooth vector fields. *Math. Ann.*, Vol. 322 (2002), 229-265. DOI: 10.1007/s002080100206.
- [19] R. Pierce, *Associative Algebras*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1982).
- [20] J. Ward, A theory of analytic functions in linear associative algebras. *Duke Math. J.*, Vol. 7 (1940), 233-248.
- [21] J. Ward, From Generalized Cauchy-Riemann Equations to Linear Algebra. *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, Vol. 4, No. 3 (1953), 456 -461.

López, E. (*elgonzal@uacj.mx*)

Unidad Multidisciplinaria de la UACJ en Cuauhtémoc, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Carretera Cuauhtémoc-Anáhuac S/N, Col. Ejido Anáhuac, Mpio. de Cuauhtémoc, Chih., C. P. 31600, México.

ALGEBRIZABLE INFINITESIMAL LIE SYMMETRIES *

López, E., Wiebe, L., Castro, J., Estrada, Q., Silva, J. †

Abstract

For each Lorch-differentiable planar vector field G , we found a family of vector fields for which G is a common infinitesimal Lie symmetry.

Keywords: Ordinary differential equations, infinitesimal Lie symmetries, associative commutative algebra.

1 Introduction

An infinitesimal Lie symmetry of a planar vector can be used for constructing an integrating factor which can be used for the construction of a first integral, see also [1], [4], and [11]. Families of planar vector fields with a common infinitesimal Lie symmetry are constructed in paper [12]. In the same way, first integrals for vector fields can be calculated. Since the level curves of the first integrals contain the integral curves of the vector fields, the dynamical behaviors of the vector fields having an infinitesimal Lie symmetry are understood. Also, the multiplicative inverse of the integrating factors, called *inverse integrating factors*, can be used to determine the limit cycles of planar vector fields, see [8]. For more results about the uses of integrating factors and inverse integrating factors in the study of solutions of vector fields, see [3], [6], [7], and [9].

In this paper, for each planar vector field differentiable in the Lorch sense G , that we call *algebrizable*, we construct a family of planar vector fields for which G is a common infinitesimal Lie symmetry.

*2000, Classifications numbers AMS 34A05, 34C05, 34C07.

†Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.

2 First integrals of differential equations and vector fields

2.1 Ordinary differential equations, vector fields and integrating factors

An important class of ordinary differential equations can be written in the form

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (1)$$

When the function f of the right hand does not depend on x , the differential equation is said to be *autonomous* and in other case it is said to be *non-autonomous*.

We assume that the function f in the differential equation (1) has the form $f(x, y) = Q(x, y)/P(x, y)$, thus we consider that

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (2)$$

This can be written equivalently in the way

$$Q(x, y)dx - P(x, y)dy = 0. \quad (3)$$

The differential equation (3) is called *exact* if there exists a function $\Phi = F(x, y)$, whose differential satisfies

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy = Q(x, y)dx - P(x, y)dy,$$

that is, $Q = \frac{\partial\Phi}{\partial x}$ and $P = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}$. When (3) is not exact, there could be a special function $\mu = \mu(x, y)$, called *integrating factor*, in such a way that

$$\mu(x, y)Q(x, y)dx - \mu(x, y)P(x, y)dy = 0 \quad (4)$$

is exact.

In this work we give some families of ordinary differential equations and vector fields for which the integrating factors can be calculated by using infinitesimal Lie symmetries.

If the following equality is satisfied:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad (5)$$

then (4) is exact.

When (3) is exact, the integral can be calculated by quadrature in the form

$$\Phi = - \int Q(x, y) dx + \int \left(P(x, y) + \frac{\partial \int Q(x, y) dx}{\partial y} \right) dy = c, \quad (6)$$

or, if it is more convenient, by the equivalent formula

$$\Phi = - \int P(x, y) dy + \int \left(Q(x, y) + \frac{\partial \int P(x, y) dy}{\partial x} \right) dx = c. \quad (7)$$

The autonomous systems of two differential equations:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y), \end{aligned} \quad (8)$$

where $\dot{x} = dx/dt$ and $\dot{y} = dy/dt$, is related with the differential equation (1) since the quotient of the second equation of system (8) and the first equation gives the equality

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

which has the form of equation (1). A *solution* of the system (8) is a curve $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ for t in some open interval of real numbers, with derivatives of $x(t)$ and $y(t)$ satisfying

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= P(x(t), y(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= Q(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

In the plane \mathbb{R}^2 a differential system of the form (8) corresponds with the vector field

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)). \quad (9)$$

It is said that a curve $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, for t in some open interval of real numbers, is an *integral curve* of the vector field F if for each t , the vector $F(x(t), y(t))$ is tangent to the curve α at the point $\alpha(t)$, that is, if it satisfies

$$F(\alpha(t)) = (P(\alpha(t)), Q(\alpha(t))).$$

Thus, a solution of a system of the type (8) coincides with the integral curve of the associated vector field (9).

2.2 First integrals

A *first integral* of a differential equation of the type (2) or (3) is a function $\Phi(x, y)$, whose level curves contain to the curves defined by the solutions of the differential equation.

A *first integral* of a differential system of the type (8) is a function $\Phi(x, y)$, whose level curves contain to the curves defined by the solutions of the system.

A *first integral* of a vector field of the type (4) is a function $\Phi(x, y)$, whose level curves contain to the integral curves of the vector field.

If the functions $P(x, y)$ and $Q(x, y)$ are given, then (2), (3), (4), and (8) have the same first integrals. That is, if Φ given in the equations is a first integral for some of (2), (3), (4), or (8), then Φ is a first integral of all of these.

A first integral determines the phase portrait of the corresponding differential equation. Thus, a first integral of a differential equation, system of differential equations or vector field allows us to understand the behavior of the corresponding dynamical system.

3 Infinitesimal Lie symmetries

When the differential equation (3) is exact, we may use equations (6) or (7) to obtain a first integral. When the equation (3) is not exact, we would like to found an integrating factor μ . In this section we see a Lie's method for constructing integrating factors for some differential equations.

A *one parameter groups of Lie symmetries* of a differential equation or vector field is an one parameter group of transformations of the corresponding phase portrait that leave invariant the phase curves. If you are interested in one parameter groups of Lie symmetries, see [12] and references therein. An *infinitesimal Lie symmetry* of a vector field F is the infinitesimal generator of an one parameter Lie symmetries of F .

A *Lie bracket* of two C^1 -vector fields $F = (P, Q)$ and $G = (R, S)$ is defined by

$$[F, G] = \left(P \frac{\partial R}{\partial x} - R \frac{\partial P}{\partial x} + Q \frac{\partial R}{\partial y} - S \frac{\partial P}{\partial y}, P \frac{\partial S}{\partial x} - R \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial S}{\partial y} - S \frac{\partial Q}{\partial y} \right). \quad (10)$$

An infinitesimal symmetry G of a vector field F is characterized by

$$[F, G] = \beta(x, y)F, \quad (11)$$

for some function $\beta : U \rightarrow \mathbb{R}$, see [4]. It is said that an infinitesimal symmetry G is *trivial* if $G = cF$, where c is a real constant. A non-trivial infinitesimal

Lie symmetry $G = (R, S)$ of a vector field $F = (P, Q)$ allows us to construct an integrating factor of F , which is given by $\mu = 1/\det\{F, G\} = 1/(PS - QR)$, see chapter IV, Section 2 of [13]. It is said that two vector fields F and G *commute* if $[F, G] = 0$, that is, G is an infinitesimal symmetry of F and vice-versa.

The Lie's methods use infinitesimal Lie symmetries for constructing integrating factors. Some of these results are presented in Chapter IV, Section 3 of [13], where a vector field G is fixed, then a family of differential equations of type (2) which are invariant by the one parameter Lie group defined by G , is determined.

4 Algebras and Lorch-analyticity

4.1 Algebras

Definition 4.1. (see [14]). We call the \mathbb{R} -linear space \mathbb{R}^2 an *algebra* \mathbb{A} if it is endowed with a bilinear product $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ denoted by $(x, y) \mapsto xy$, which is associative and commutative $x(yz) = (xy)z$ and $xy = yx$ for all $x, y, z \in \mathbb{A}$; furthermore, there exists a unit $e = e_{\mathbb{A}} \in \mathbb{A}$, which satisfies $ex = xe = x$ for all $x \in \mathbb{A}$.

An element $a \in \mathbb{A}$ is called *regular* if there exists $a^{-1} \in \mathbb{A}$ called *the inverse* of a such that $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$. We also use the notation e/a for a^{-1} , where e is the unit of \mathbb{A} . If $a \in \mathbb{A}$ is not regular, then a is called *singular*. If $a, b \in \mathbb{A}$ and b is regular, the quotient a/b means $a \cdot b^{-1}$.

Consider an algebra \mathbb{A} . The product between the elements of the standard basis $\{e_1, e_2\}$ of \mathbb{R}^2 is given by $e_i e_j = \sum_{k=1}^2 c_{ijk} e_k$, where $c_{ijk} \in \mathbb{R}$ for $i, j, k \in \{1, 2\}$ are called *structure constants* of \mathbb{A} . The *first fundamental representation* of \mathbb{A} is the injective linear homomorphism $R : \mathbb{A} \rightarrow M(2, \mathbb{R})$ defined by $R : e_i \mapsto R_i$, where R_i is the matrix with $[R_i]_{jk} = c_{ikj}$, for $i = 1, 2$.

4.2 Differentiability on algebras

The definitions and results about algebrizability, classical line integrals and line integrals on algebras, of vector fields and functions $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, are the same in this paper. These vector fields and functions are denoted in the same way: $F = (f_1, f_2)$.

Now, we recall definition of Lorch differential.

Definition 4.2. Let \mathbb{A} be an algebra and $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a vector field defined on an open set Ω . We say that F is *\mathbb{A} -algebrizable* on Ω if there exists a

function $F' : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, called \mathbb{A} -*derivative* of F on Ω , which satisfies

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{|F(w_0 + \xi) - F(w_0) - F'(w_0)\xi|}{|\xi|} = 0, \quad (12)$$

for all $w_0 \in \Omega$, where $F'(w_0)\xi$ denotes the product in \mathbb{A} of $F'(w_0)$ with ξ .

We simply say that F is algebrizable when F is \mathbb{A} -algebrizable for some algebra \mathbb{A} .

If $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is Fréchet differentiable, we denote by $JF : \Omega \rightarrow M(2, \mathbb{R})$ to the function defined by the Jacobian matrix of F in (x, y) , that is,

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}|_{(x,y)} & \frac{\partial f_1}{\partial y}|_{(x,y)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}|_{(x,y)} & \frac{\partial f_2}{\partial y}|_{(x,y)} \end{pmatrix}.$$

Lemma 4.3. [15] *Let $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be a Fréchet differentiable vector field, where Ω is an open set. Then, F is \mathbb{A} -algebrizable on Ω if and only if the function $JF : \Omega \rightarrow M(2, \mathbb{R})$ has image in $R(\mathbb{A})$, where R is first fundamental representation of \mathbb{A} .*

The \mathbb{A} -algebrizability coincides with the holomorphicity when \mathbb{A} is the complex field and satisfies the usual rules of differentiation.

4.3 Generalized Cauchy-Riemann equations

In this subsection we give a characterization of the algebrizability based in the generalized Cauchy-Riemann equations.

Given an algebra \mathbb{A} with structure constants c_{ijk} , the set of partial differential equations

$$\sum_{i=1}^2 c_{i1k} \frac{\partial f_i}{\partial y} = \sum_{i=1}^2 c_{i2k} \frac{\partial f_i}{\partial x}, \quad k = 1, 2, \quad (13)$$

appears in [10], p. 646, and is called *generalized Cauchy-Riemann equations* of \mathbb{A} . The classical Cauchy-Riemann equations of the complex field \mathbb{C} may be seen in [2]. A vector field $F = (f_1, f_2)$ is \mathbb{A} -algebrizable on Ω if and only if f_1 and f_2 satisfy (13) on Ω .

4.4 Algebrizability of planar vector fields

The algebrizability of planar vector fields $F = (f_1, f_2)$ is characterized in [5]. A vector field F is algebrizable on an open set Ω if and only if for one of the three cases:

- $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix},$
- $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$
- $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$

we have $\langle B_i, JF(x, y) \rangle = 0$ for all $(x, y) \in \Omega$ and $i = 1, 2$, where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the inner product.

The corresponding algebra in each of the cases is given by the types

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 \\ e_2 & e_2 & -be_1 + ae_2 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & -ae_1 & e_1 \\ e_2 & e_1 & e_2 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & 0 \\ e_2 & 0 & e_2 \end{array},$$

respectively, where $\{e_1, e_2\}$ is the standard basis of \mathbb{R}^2 .

For a given planar vector field F the condition of existence of two matrices B_1 and B_2 of first type with $a = 0$ and $b = 1$, which satisfy $\langle B_i, JF(x, y) \rangle = 0$ for $i = 1, 2$, is equivalent to the requirement for F to satisfy the classical Cauchy-Riemann equations; see [2]. In this case the algebra is the algebra of the complex numbers \mathbb{C} , which is obtained in first type above for $a = 0$ and $b = 1$.

In the following example we give a vector field for which there exists a couple of matrices of first type with constants $a = 0$ and $b = 1$.

Example 4.4. Consider the vector field $F = (x^2 - y^2, 2xy)$. Then the Jacobian matrix JF satisfies $\langle B_i, JF(x, y) \rangle = 0$ for all $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ and $i = 1, 2$, where B_1 and B_2 are matrices of first type with constants $a = 0$ and $b = 1$. So that F is \mathbb{A} -differentiable with respect to the algebra \mathbb{A} defined by the algebra product of first type with constants $a = 0$ and $b = 1$, which is the algebra of the complex numbers \mathbb{C} . As it is well-known $F(z) = z^2$ with respect to the product of \mathbb{C} .

5 Calculation of integrating factors through infinitesimal Lie symmetries

In the previous section we have that a non-trivial infinitesimal symmetry G of a planar vector field F allows us to construct an integrating factor. In this section we are only interested in this type of symmetries. We do not consider the null vector field.

If $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is a function, we also use notation h_x for $\frac{\partial h}{\partial x}$ and h_y for $\frac{\partial h}{\partial y}$.

5.1 Calculation of infinitesimal symmetries of vector fields

Given a planar vector field $F = (P, Q)$, we are looking by another vector field $G = (R, S)$, such that the Lie bracket of F and G given in (10) satisfies (11), which implies that G be an infinitesimal Lie symmetry of F . In terms of the Jacobian matrices of F and G this condition is equivalent to the equality

$$\begin{pmatrix} R_x & R_y \\ S_x & S_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}. \quad (14)$$

The right hand above is equal to the Lie bracket of $[F, G]$. From the equation (14) can be obtained

$$F \cdot \nabla R - G \cdot \nabla P = \beta P, \quad F \cdot \nabla S - G \cdot \nabla Q = \beta Q.$$

Thus, G is an infinitesimal symmetry of F if and only if the components R and S of G satisfy the equation

$$\frac{F \cdot \nabla R - G \cdot \nabla P}{P} = \frac{F \cdot \nabla S - G \cdot \nabla Q}{Q}. \quad (15)$$

Given a planar vector field $F = (P, Q)$, we will ask for a vector field $G = (R, S)$, $G \neq cF$ for all c constants, in such a way that the equality (15) is satisfied. This would give an integrating factor $\mu = 1/(PS - QR)$, which allows us to find a first integral Φ of the differential equation (2), of the planar system of differential equations (8) and of the vector field (9), through some of the integrals (6) and (7).

Vector fields with infinitesimal symmetry $G = (R, S)$.

The following two propositions can be used for determining a family of vector fields with common infinitesimal Lie symmetry G , for a given vector field G .

Proposition 5.1. ([12]) *Suppose that the vector fields F_1 and F_2 commutes with G , then $F = F_1 + F_2$ commute with G .*

Proposition 5.2. ([12]) *Suppose that a vector field F commute with G , then G is an infinitesimal symmetry of $H = hF$ for any differentiable scalar function $h(x, y)$.*

5.2 The cases $G = (R, S)$ algebrizable

In all proofs of this subsection, β is a function satisfying equation (14).

$G = (R, S)$ **algebrizable with respect to a product of the first type**

If $G = (R, S)$ is algebrizable with respect to a product of first type given in Subsection 4.4, by multiplying the matrices of first type B_1 and B_2 by the Jacobian matrix JG of G , we obtain the generalized Cauchy-Riemann equations:

$$R_x + aS_x - S_y = 0, \quad R_y + bS_x = 0. \quad (16)$$

The following Proposition gives a characterization of the family of vector fields which have a common infinitesimal Lie symmetry G which is \mathbb{A} -algebrizable.

Proposition 5.3. *Consider a planar vector field $G = (R, S)$ which is \mathbb{A} -algebrizable with respect to an algebra \mathbb{A} with a product of the first type given in Subsection 4.4, with constants a and b . Then, a vector field $F = (P, Q)$ has to G as its infinitesimal Lie symmetry if and only if one of the following conditions is satisfied:*

1. $F = (P, 0)$, $P \neq 0$.
2. $F = (0, Q)$, $Q \neq 0$.
3. $F = (P, Q)$ with $PQ \neq 0$ and

$$S_x(P^2 - aPQ + bQ^2) = PG \cdot \nabla Q - QG \cdot \nabla P.$$

Proof. Let $\beta = S_y - (G \cdot \nabla H)/H$. In the first case $H = P$, in the second $H = Q$, and in the third $\beta = \frac{F \cdot \nabla S - G \cdot \nabla Q}{Q}$. By using equations (14) and (16), we may see that $[F, G] = \beta F$.

It can be showed that if the Lie bracket of F and G satisfy $[F, G] = \beta F$, then F has the form given is some of the cases above by using equations (16). \square

In the following example is given a family of vector fields which commute with an \mathbb{A} -algebrizable vector field G , where \mathbb{A} is an algebra with a product of the first type given in Subsection 4.4.

Example 5.4. Consider a planar vector field $G = (R, S)$ which is \mathbb{A} -algebrizable with respect to an algebra \mathbb{A} with a product of the first type given in Subsection 4.4, with constants a and b . For every pair of constants $c, d \in \mathbb{R}$, we have that the vector field $F = (P, Q)$, where $P = cR - bdS$ and $Q = cS + dR + adS$ satisfies the third case of Proposition 5.3. More over, the vector fields F and G commute.

Now, we consider a planar vector field $G = (x^2 - y^2, 2xy)$ which by Example 4.4 is \mathbb{A} -algebrizable for an algebra \mathbb{A} of the first type with $a = 0$ and $b = 1$, that is, \mathbb{A} is the system of the complex numbers.

Example 5.5. Consider the planar vector field $G = (x^2 - y^2, 2xy)$ which is \mathbb{A} -algebrizable with respect to an algebra \mathbb{A} with a product of the first type given in Subsection 4.4, with constants 0 and 1. By Example 4.4 \mathbb{A} -algebrizable for the algebra of the complex numbers $\mathbb{A} = \mathbb{C}$. By Example 5.5, we have that for every pair of constants $c, d \in \mathbb{R}$ the vector field

$$F(x, y) = (cx^2 - cy^2 - 2dxy, 2cxy + dx^2 - dy^2)$$

has to G as its infinitesimal Lie symmetry. More over, the vector fields F and G commute.

The products of the vector fields F given in Example 5.5 by differentiable functions remain having to the algebrizable field G as their infinitesimal symmetry, as we see in the following example:

Example 5.6. Consider a planar vector field $G = (R, S)$ which is \mathbb{A} -algebrizable with respect to an algebra \mathbb{A} with a product of the first type given in Subsection 4.4, with constants a and b . For every pair of constants $c, d \in \mathbb{R}$ and a scalar differentiable function $h = h(x, y)$, by Proposition 5.2 and Example 5.5 we have that the vector field $F = (hP, hQ)$, where $P = cR - bdS$ and $Q = cS + dR + adS$, satisfies the third case of Proposition 5.3.

In addition to the vector fields given in Examples 5.5 and 5.6, the vector fields of the type given in the following example have to an algebrizable vector field G as their infinitesimal Lie symmetry:

Example 5.7. Consider a planar vector field $G = (R, S)$ which is \mathbb{A} -algebrizable with respect to an algebra \mathbb{A} with a product of the first type given in Subsection 4.4, with constants a and b . If $P = P(x, y)$ is a scalar differentiable function, then by first and second cases of Proposition 5.3 we have that $F_1 = (P, 0)$ and $F_2 = (0, P)$ has to G as their infinitesimal symmetry.

Constant vector fields $F = (k, l)$ with $kl \neq 0$ could have G as their infinitesimal Lie symmetry.

Example 5.8. Consider a planar vector field $G = (R, S)$ which is \mathbb{A} -algebrizable with respect to an algebra \mathbb{A} with a product of the first type given in Subsection 4.4, with constants a and b . If the constant vector field $F = (k, l)$ satisfies $k^2 - ak l + bl^2 = 0$, then by third case of Proposition 5.3 F has to G as its infinitesimal symmetry.

$G = (R, S)$ **algebrizable with respect to a product of the second type**

If $G = (R, S)$ is algebrizable with respect to a product of second type given in Subsection 4.4, by multiplying the matrices of second type B_1 and B_2 by the Jacobian matrix JG of G , we obtain the generalized Cauchy-Riemann equations:

$$R_x + aR_y - S_y = 0, \quad S_x = 0. \quad (17)$$

The second equation says that S depends only on y if G is \mathbb{A} -algebrizable with respect to an algebra with a product of the second type.

The following Proposition gives a characterization of the family of vector fields which have a common infinitesimal Lie symmetry G which is \mathbb{A} -algebrizable:

Proposition 5.9. *Consider a planar vector field $G = (R, S)$ which is \mathbb{A} -algebrizable with respect to an algebra \mathbb{A} with a product of the second type given in Subsection 4.4, with constant a . Then, a vector field $F = (P, Q)$ has to G as its infinitesimal Lie symmetry if and only if one of the following conditions is satisfied:*

1. $F = (P, 0)$, $P \neq 0$.
2. $F = (0, Q)$, $Q \neq 0$.
3. $F = (P, Q)$ with $PQ \neq 0$ and

$$R_y(aPQ - Q^2) = PG \cdot \nabla Q - QG \cdot \nabla P.$$

Proof. In the first case we take $\beta = R_x - (G \cdot \nabla P)/P$, in the second $\beta = S_y - (G \cdot \nabla Q)/Q$, and in the third $\beta = \frac{F \cdot \nabla R - G \cdot \nabla P}{P}$. By using equations (14) and (17), we may see that $[F, G] = \beta F$.

It can be showed that if the Lie bracket of F and G satisfy $[F, G] = \beta F$, then F has the form given is some of the cases above by using equations (17). \square

In the following example is given a family of vector fields which commute with an \mathbb{A} -algebrizable vector field G , where \mathbb{A} is an algebra with a product of the first type given in Subsection 4.4.

Example 5.10. Consider a planar vector field $G = (R, S)$ which is \mathbb{A} -algebrizable with respect to an algebra \mathbb{A} with a product of the first type given in Subsection 4.4, with constant a . For every pair of constants $c, d \in \mathbb{R}$, we have that the vector field $F = (P, Q)$, where $P = -acR + cS + dP$ and $Q = dS$ satisfies the third case of Proposition 5.9. More over, the vector fields F and G commute.

The products of the vector fields F given in Example 5.10 by differentiable functions remain having to the algebrizable field G as their infinitesimal symmetry, as we see in the following example:

Example 5.11. Consider a planar vector field $G = (R, S)$ which is \mathbb{A} -algebrizable with respect to an algebra \mathbb{A} with a product of the second type given in Subsection 4.4, with constant a . For every pair of constants $c, d \in \mathbb{R}$ and a scalar differentiable function $h = h(x, y)$, by Proposition 5.2 and Example 5.10 we have that the vector field $F = (hP, hQ)$, where $P = -acR + cS + dP$ and $Q = dS$, satisfies the third case of Proposition 5.9.

In addition to the vector fields given in Examples 5.10 and 5.11, the vector fields of the type given in the following example have to an algebrizable vector field G as their infinitesimal Lie symmetry.

Example 5.12. Consider a planar vector field $G = (R, S)$ which is \mathbb{A} -algebrizable with respect to an algebra \mathbb{A} with a product of the second type given in Subsection 4.4, with constant a . If $P = P(x, y)$ is a scalar differentiable function, then by first and second cases of Proposition 5.9 we have that $F_1 = (P, 0)$ and $F_2 = (0, P)$ has to G as their infinitesimal symmetry.

Constant vector fields $F = (k, l)$ with $kl \neq 0$ could have G as their infinitesimal Lie symmetry.

Example 5.13. Consider a planar vector field $G = (R, S)$ which is \mathbb{A} -algebrizable with respect to an algebra \mathbb{A} with a product of the second type given in Subsection 4.4, with constant a . If the constant vector field $F = (k, l)$ satisfies $akl - l^2 = 0$, then by third case of Proposition 5.9 F has to G as its infinitesimal symmetry.

$G = (R, S)$ algebrizable with respect to a product of the third type

If $G = (R, S)$ is algebrizable with respect to a product of third type given in Subsection 4.4, by multiplying the matrices of third type B_1 and B_2 by the Jacobian matrix JG of G , we obtain the generalized Cauchy-Riemann equations:

$$R_y = 0, \quad S_x = 0. \quad (18)$$

That is, R depends only on x and S depends only on y .

The following Proposition gives a characterization of the family of vector fields which have a common infinitesimal Lie symmetry G which is \mathbb{A} -algebrizable:

Proposition 5.14. *Consider a planar vector field $G = (R, S)$ which is \mathbb{A} -algebrizable with respect to an algebra \mathbb{A} with a product of the third type given in Subsection 4.4. Then R depends only on x and S depends only on y and a vector field $F = (P, Q)$ has to G as its infinitesimal Lie symmetry if and only if one of the following conditions is satisfied:*

1. $F = (P, 0)$, $P \neq 0$.
2. $F = (0, Q)$, $Q \neq 0$.
3. $F = (P, Q)$ with $PQ \neq 0$ and

$$(R_x - S_y)PQ = PG \cdot \nabla Q - QG \cdot \nabla P.$$

Proof. In the first case we take $\beta = R_x - (G \cdot \nabla P)/P$, in the second $\beta = S_y - (G \cdot \nabla Q)/Q$ and in the third $\beta = \frac{R_x P - G \cdot \nabla P}{P}$. By using equations (14) and (17) we may see that $[F, G] = \beta F$.

It can be showed that if the Lie bracket of F and G satisfy $[F, G] = \beta F$, then F has the form given is some of the cases above by using equations (18). \square

In the following example is given a family of vector fields which commute with an \mathbb{A} -algebrizable vector field G , where \mathbb{A} is an algebra with a product of the first type given in Subsection 4.4.

Example 5.15. Consider a planar vector field $G = (R, S)$ which is \mathbb{A} -algebrizable with respect to an algebra \mathbb{A} with a product of the first type given in Subsection 4.4. For every pair of constants $c, d \in \mathbb{R}$, we have that the vector field $F = (P, Q)$ where $P = cR$ and $Q = dS$, satisfies the third case of Proposition 5.14. More over, the vector fields F and G commute.

The products of the vector fields F given in Example 5.15 by differentiable functions remain having to the algebrizable field G as their infinitesimal symmetry, as we see in the following example:

Example 5.16. Consider a planar vector field $G = (R, S)$ which is \mathbb{A} -algebrizable with respect to an algebra \mathbb{A} with a product of the second type given in Subsection 4.4. For every pair of constants $c, d \in \mathbb{R}$ and a scalar differentiable function $h = h(x, y)$, by Proposition 5.2 and Example 5.15 we have that the vector field $F = (hP, hQ)$, where $P = cR$ and $Q = dS$, satisfies the third case of Proposition 5.14.

In addition to the vector fields given in Examples 5.15 and 5.11, the vector fields of the type given in the following example have to an algebrizable vector field G as their infinitesimal Lie symmetry.

Example 5.17. Consider a planar vector field $G = (R, S)$ which is \mathbb{A} -algebrizable with respect to an algebra \mathbb{A} with a product of the second type given in Subsection 4.4, with constant a . If $P = P(x, y)$ is a scalar differentiable function, then by first and second cases of Proposition 5.14 we have that $F_1 = (P, 0)$ and $F_2 = (0, P)$ has to G as their infinitesimal symmetry.

Constant vector fields $F = (k, l)$ with $kl \neq 0$ could have G as their infinitesimal Lie symmetry.

Example 5.18. Consider a planar vector field $G = (R, S)$ which is \mathbb{A} -algebrizable with respect to an algebra \mathbb{A} with a product of the second type given in Subsection 4.4, with constant a . If $R(x) = ax$ and $S(y) = ay$ for some real constant a , then the constant vector field $F = (k, l)$ satisfies the third case of Proposition 5.14, thus F has to G as its infinitesimal symmetry.

Bibliography

- [1] Al-Dosary, K., Inverse integrating factor for classes of planar differential systems. *Int. J. of Math. Analysis*, 4, N. 29 (2010), 1433-1446.
- [2] Ahlfors, L. V., *Complex Analysis*, McGraw-Hill International Book Company, 1979.
- [3] Berrone, L., Giacomini, H., On the vanishing set of inverse integrating factors, *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 1 (2000), 211-230.
- [4] Garcia, I., Grau, M., A survey on the inverse integrating factor, *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 9, N. 1-2 (2010), 115-166.
- [5] García, M.A. , Frías-Armenta M. E., Grimaldo-Reyna, M. E., and López-González, E., *Algebrizability of planar vector fields*, submitted to *Morfismos* (2016).
- [6] Garcia, I., Giacomini, H., Grau, M., The inverse integrating factor and the Poincaré map, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362 (2010), 3591-3612.
- [7] Giné, J., On the centers of planar analytic differential systems, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 17 (2007), 3061-3070.

-
- [8] Giacomini, H., Llibre, J., Viano, M., On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles, *Nonlinearity*, 9 (1996), 501-516.
- [9] Hale, J., Kocak, H., *Dynamics and bifurcations, Text in Applied Mathematics*, 3, Springer-Verlag, New York (1991).
- [10] Ketchum, P., Analytic Functions of Hypercomplex Variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 30 (1928), 641-667.
- [11] López-González, E., Osuna, O., Villaseñor-Aguilar, G., On the construction of inverse integrating factors for planar vector fields, *Aportaciones matemáticas 2015*.
- [12] López González, E., Wiebe-Quintana, L., Martínez-García, E., Torres-Córdoba, R. and Carrillo-Saucedo, V., On solutions of EDOS by infinitesimal Lie symmetries, *AVANZA*, Vol. VI.
- [13] Page, J. M., Ordinary Differential Equations with an Introduction to Lie's *Theory or the Group of One Parameter*, MacMillan, London (1897).
- [14] Pierce, R., *Associative Algebras*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1982).
- [15] Ward, J., From Generalized Cauchy-Riemann Equations to Linear Algebra, *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, Vol. 4, No. 3 (1953), 456-461.

López, E. (*elgonzal@uacj.mx*)

Unidad Multidisciplinaria de la UACJ en Cuauhtémoc, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Carretera Cuauhtémoc-Anáhuac S/N, Col. Ejido Anáhuac, Mpio. de Cuauhtémoc, Chih., C. P. 31600, México.

La colección *AVANZA* publica artículos de investigación originales en cualquier área de las matemáticas y sus aplicaciones; asimismo, publica artículos de divulgación y textos monográficos en diversas áreas de la ciencia que involucran el uso de las matemáticas. Todos los artículos son sometidos a evaluación por pares para ser publicados.

A los autores

Los artículos deberán ser escritos en \LaTeX (código original), apegándose a los lineamientos de la publicación (disponibles en <http://elibros.uacj.mx/series/avanza>) y enviados por correo electrónico al Editor General: Luis Loeza Chin (luis.loeza@uacj.mx), Instituto de Ingeniería y Tecnología, UACJ. Av. del Charro núm. 450 norte, Ciudad Juárez, Chihuahua, México, C. P. 32310, A. P. 1594-D.

Para ver los volúmenes anteriores de la colección *AVANZA*, visite el portal:

<http://elibros.uacj.mx/series/avanza>

La presentación de una contribución para su publicación en la colección *AVANZA* conlleva el compromiso por parte de sus autores de que esta no ha sido previamente publicada o simultáneamente sometida para su publicación en otro medio.

Las Líneas de Generación y Aplicación del Conocimiento que cultiva el Cuerpo Académico de Matemáticas Puras y Aplicadas son: Álgebra, Ecuaciones diferenciales y Sistemas dinámicos, matemáticas aplicadas y lógica matemática y fundamentos. Sus miembros trabajan de manera colegiada para la creación de nuevos conocimientos en estas áreas y sus aplicaciones. Asimismo, se busca involucrar a estudiantes avanzados de la Licenciatura en Matemáticas en estas actividades con el objetivo de acercarlos a la investigación científica, contribuyendo con ello a una formación más sólida de los egresados de esta licenciatura.

El presente material es un registro de algunas de las actividades realizadas por el Cuerpo Académico de Matemáticas Puras y Aplicadas. Todos los trabajos incluidos se han presentado en las actividades regulares del Cuerpo Académico o son producto de los esfuerzos colectivos de sus miembros y sus relaciones de colaboración con investigadores de otras instituciones.