

**Título del Proyecto
de Investigación a que corresponde el Reporte Técnico:**

Modelación Estocástica bajo Nivel Inicial y Nivel Crítico Aleatorios

Tipo de financiamiento

Sin financiamiento

Autores del reporte técnico:

Dr. Luis Alberto Rodríguez Picón
Dr. Roberto Romero López
Dr. Luis Asunción Pérez Domínguez

Modelación Estocástica bajo Nivel Inicial y Nivel Crítico Aleatorios

Resumen del reporte técnico en español

La modelación estocástica implica determinar el comportamiento de una variable observable a través del tiempo. Al obtener una forma paramétrica de tal modelación es posible obtener información sobre el comportamiento de la variable. Sin embargo, para esto es necesario considerar ciertos supuestos sobre los modelos. Dos supuestos importantes son que el punto inicial de un proceso es constante y que el punto final del proceso está definido. Bajo este contexto, la presente investigación se llevó a cabo para desarrollar un esquema de modelación estocástica que considere que el punto inicial es aleatorio y que el punto final o nivel crítico también lo es. En el presente reporte se presenta el enfoque de modelación general con algunos resultados para un caso específico.

Report Summary

Stochastic modeling implies to determine the behavior of a certain observable random variable through time. When a specific parametric form is defined to model such behavior, it is possible to obtain information about the random variable. Nevertheless, to obtain information it is necessary to consider certain assumptions about the modeling. Two important assumptions are that the initial value of the random variable is known to be constant and that the threshold is also known to be constant. Considering these assumptions, this research project was carried out to develop a stochastic modeling approach that considers that both the initial level and the threshold are also random variables. In this technical report, we present a general modeling scheme with some results for a specific case study.

Palabras clave: Proceso estocástico, deconvolución, valor inicial aleatorio, valor crítico aleatorio.

Usuarios potenciales

Industrias y laboratorios para la medición de la confiabilidad de productos.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los principales enfoques de modelación para describir el comportamiento de variables aleatorias y que ha cobrado relevancia en los últimos años esta basado en procesos estocásticos. Los enfoques de aplicación van desde modelar el comportamiento de una o varias características de un producto, las cuales terminan definiendo el nivel de calidad del mismo, hasta la descripción de fenómenos químicos y físicos (Ye y Xie, 2014; Kharoufeh y Cox, 2007; Si, 2015). Precisamente, el uso de procesos estocásticos para caracterizar la calidad de productos permite realizar estimaciones de confiabilidad sin la necesidad de tener en cuenta tiempos de falla de los productos bajo estudio. De manera general, la modelación consiste en el uso de un proceso estocástico para describir el comportamiento de las características de manera que sea posible extrapolar el comportamiento hasta un nivel crítico para obtener pseudo tiempos de falla con los cuales se realice la estimación de confiabilidad (Park y Padgett, 2006; Gorjian et al., 2010; Nikulin et al., 2010).

La determinación del nivel crítico es una consideración importante de la modelación dado que termina definiendo las variables sobre las cuales se basa el análisis de confiabilidad del producto (Thomas et al., 2012; Huang et al., 2015; Kim et al., 2014; Dong y Cui, 2019). Un ejemplo de un nivel crítico puede ser el nivel mínimo de resistencia a la tensión que debe tener un cierto material de manera que pueda desempeñar cierta función, cuando la resistencia es menor que ese nivel crítico entonces esta condición determinara una falla del producto como tal. Este ejemplo considera que todos los materiales deben tener esa condición de resistencia mínima para que puedan cumplir con su función como componentes de un producto. Sin embargo, existen casos en los que considerar un nivel crítico global no resulta adecuado. Precisamente en el planteamiento del problema se describe un caso, en el cual se considera la propagación de una fractura a través del largo de una terminal. Definitivamente el nivel crítico es el ancho total de la terminal, dado que cuando la fractura tenga una longitud igual o mayor a ese ancho la

terminal terminará por quebrarse. No obstante, no todas las terminales tienen exactamente el mismo ancho, en realidad el ancho de las terminales es una variable aleatoria, por lo que el nivel crítico en este caso no se puede considerar como constante.

Otra consideración importante dentro de la modelación estocástica es el valor inicial de la variable de interés cuando $t = 0$, normalmente se considera que este valor también es constante. De hecho, en un gran número de estudios que se han reportado en la literatura se considera que cuando $t = 0$ el valor inicial de todas las variables es 0 o un cierto valor definido (Jiang et al., 2015; Si et al., 2014; Zhang et al., 2017; Li et al., 2017). Lo cual implica que, por ejemplo, si se trata de la resistencia de un material la resistencia inicial de todos los materiales es un cierto valor específico, lo cual resulta poco probable dado que definitivamente existirán variaciones en las composiciones de los diferentes materiales que resultarán en pequeñas o grandes variaciones de la resistencia inicial. Esta condición, permite considerar que el valor inicial de una característica de desempeño también es una variable aleatoria, cuyo comportamiento también debe considerarse dentro de la modelación estocástica (Shen et al., 2019).

Definitivamente, estas dos condiciones de modelación (tanto el nivel crítico como el valor inicial aleatorios) son de interés en muchos productos cuando se pretende caracterizar el comportamiento de una característica de calidad a través del tiempo. Por lo que al considerarlas como parte del enfoque de modelación permitirá determinar de mejor manera la calidad de los productos bajo estudio. Como parte del desarrollo del proyecto de investigación se consideraron estas dos condiciones mediante dentro del proceso gamma, el enfoque de desarrollo se basó en un proceso de deconvolución para las dos variables aleatorias. En la siguiente sección se realiza un planteamiento detallado del caso de estudio de interés.

2. PLANTEAMIENTO

La problemática que se pretende estudiar en la presente investigación está relacionada con una problemática real, la cual consiste en caracterizar el comportamiento de una fractura de una terminal de un sensor. A continuación, se presenta una breve descripción del proceso y del producto bajo estudio. La parte bajo estudio del sensor

consta de una terminal que tiene la función de transferir información desde una celda de medición hasta una tablilla. La celda de medición obtiene información y la transfiere a través de un filamento que es soldado a la terminal, la cual a su vez envía la información hacia la tablilla para su procesamiento. La terminal y el filamento son soldados mediante dos electrodos por fusión. Por ciertas condiciones del proceso y del material, cuando la terminal y el filamento son soldados, se presenta una fractura en la terminal. La propagación de la fractura resulta un fenómeno de interés dado que podría provocar una falla del dispositivo. Por esta razón, se sometieron diferentes sensores a una prueba de vibración durante una semana con la finalidad de estudiar la propagación de la fractura a través del tiempo bajo estas condiciones. Los resultados de la prueba de vibración permitieron caracterizar la propagación de la fractura hasta un cierto punto.

Definitivamente si la fractura se propaga en todo el ancho de la terminal, provocaría que se perdiera la señal que la celda de medición envía hacia la tablilla, lo que resulta en una falla total del dispositivo. Esto resulta en considerar que el punto final o nivel crítico va a ser diferente para cada terminal, dado que la dimensión del ancho total varía de terminal a terminal. Por otra parte, la dimensión inicial de la fractura es diferente en cada terminal, lo cual presenta dos problemáticas importantes para modelar el comportamiento a través del tiempo de la fractura. Los procesos estocásticos son modelos con características apropiadas para modelar la propagación de la fractura, sin embargo, en la literatura se ha encontrado que en la mayoría de las aplicaciones se considera que el nivel inicial de una característica es constante o cero, mientras que el nivel crítico resulta ser también constante. Claramente estos supuestos suponen una limitante importante para el caso de estudio presentado en esta sección. Por lo que la presente investigación se centró en trabajar en un proceso estocástico que permita tener ambas consideraciones acordes para poder analizar la fractura del caso de estudio.

3. METODOLOGÍA

El esquema presentado en la Figura 1 representa la metodología general de modelación que se consideró para el desarrollo del proyecto de investigación. A continuación, se describen brevemente cada uno de los pasos de la metodología propuesta.

1. Prueba de vibración a terminales. Como parte del estudio es necesario realizar una prueba de vibración acelerada con el fin de estudiar la propagación de las fracturas. Tal prueba fue realizada en diez dispositivos considerando que cada uno tiene una terminal fracturada. Los diez dispositivos fueron montados en un dispositivo de vibración en una cámara y fueron sujetos a perfiles de vibración sinusoidales. El incremento en dimensión de las fracturas fue medido cada 100,000 ciclos hasta los 900,000 ciclos. Las mediciones se obtuvieron mediante un sistema de visión.
2. Ajustar datos a un proceso gamma. Los datos de los casos de estudio se pretenden ajustar a un proceso gamma. El ajuste implica estimar los parámetros de forma y de escala de la función definida en (1). Las estimaciones se realizaron mediante estimación por máxima verosimilitud.
3. Definición del nivel inicial de la trayectoria. Para el caso de estudio del presente proyecto de investigación se considera que el nivel inicial de la trayectoria es aleatorio, dado que la dimensión inicial de la fractura resulta diferente para cada terminal. Por lo que será necesario definir una función de densidad de probabilidad que describa el comportamiento del nivel inicial. Una vez definida la función, el siguiente paso consistirá en ajustar los datos disponibles de nivel inicial a la función de densidad de manera que sea posible estimar los parámetros. Por otra parte, para otros casos de estudio en los que se tenga certeza que el nivel inicial es cero y cualquier valor constante, entonces se puede definir tal valor desde el inicio de la modelación.
4. Definición del nivel crítico de la trayectoria. De igual manera, para este caso de estudio se considera que el nivel crítico es aleatorio dado que es de interés estudiar la propagación de la fractura hasta el ancho total de la terminal y como existe variación entre el ancho de las terminales se considera que el nivel crítico es aleatorio. Bajo estas condiciones se considera definir una función de densidad de probabilidad para describir el comportamiento de los niveles críticos. Una vez definida, se ajustarán los datos de ancho de terminal a la función para estimar parámetros y que resulte posible caracterizar las distribuciones de tiempos de falla de las trayectorias. Por otra parte, si se tiene certeza de que el nivel crítico es constante se puede definir como tal desde el inicio de la modelación.

5. Función paramétrica conjunta. Para esta fase de la metodología se considera modelar de manera conjunta tanto las distribuciones del nivel crítico y el nivel inicial con la función definida en (3), de manera que resulta en la solución de la integral expresada en (6). La estrategia considerada es que como se puede notar en (3), tanto para ω como para z_0 se considera una resta, por lo que se pretende realizar una deconvolución de ambas variables aleatorias. De esta manera la integral definida en (6) resultará menos compleja dado que se lidiará con solo dos expresiones, la de (3) y una más que resultará de la deconvolución para ω y z_0 .
6. Estimación de parámetros. Dada la complejidad de la función que resultará de (6), se pretende estimar los parámetros mediante un enfoque Bayesiano basado en MCMC. Los modelos se programarán en softwares especializados tales como OpenBUGS, WinBUGS y R.
7. Análisis de confiabilidad. La intención final del esquema de modelación es obtener una estimación de confiabilidad, de manera que se pueda obtener una estimación del tiempo que tiene que pasar para que la fractura se propague hasta todo el ancho de la terminal en condiciones normales. Por lo que se planean obtener percentiles de los tiempos de falla, así como caracterizaciones de la función de confiabilidad y tasa de falla del caso de estudio.

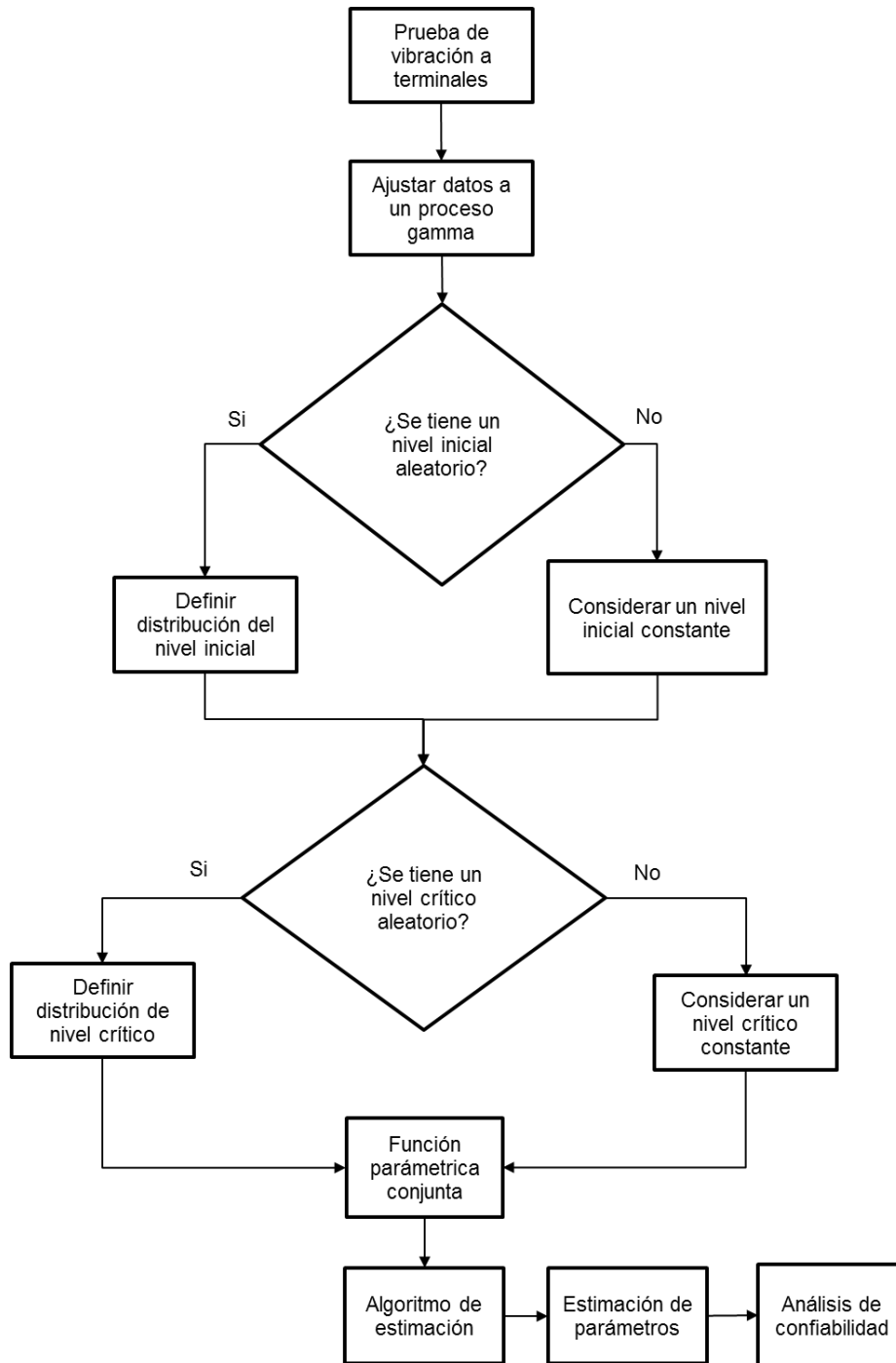


Figura 1. Esquema de metodología de investigación

4. RESULTADOS

En esta sección se presenta inicialmente los datos que se consideraron como base para el enfoque de modelación propuesto, después se presenta el desarrollo del modelo para terminar presentando algunos resultados importantes de la aplicación del modelo al caso de estudio.

4.1 El caso de estudio

Como se menciona en el planteamiento del problema, el caso de estudio de interés está relacionado con la propagación de una fractura en una terminal de un dispositivo electrónico. En la Figura 2 se muestra el caso de una fractura de una terminal.

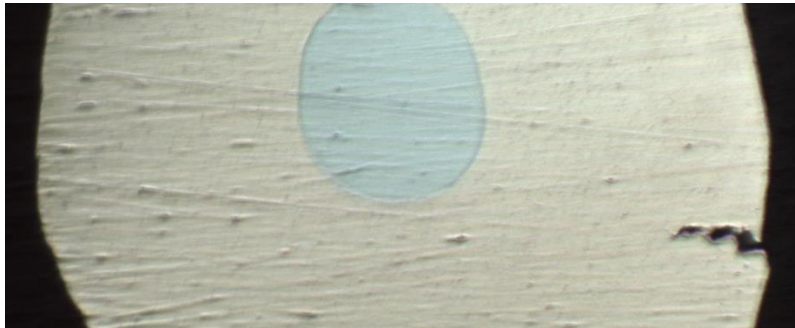


Figura 2. Fractura en terminal

Con la finalidad de acelerar el crecimiento de la fractura, se consideraron 10 dispositivos para llevar a cabo una prueba de vibración considerando diferentes números de ciclos, desde 0.1 cientos de miles hasta 0.9 cientos de miles. Los diez dispositivos fueron montados en una cámara de vibración y se inspeccionó cada 0.1 cientos de miles de ciclos cuando se propagó la fractura en cada dispositivo. Las mediciones de las propagaciones de las fracturas de los 10 dispositivos se llevaron a cabo mediante un sistema de visión especializado. Los resultados de las mediciones para todos los especímenes de prueba se muestran en la tabla 1. Específicamente, en la tabla 1 se muestran los incrementos en las longitudes de todas las fracturas. En la Figura 3, se muestran gráficamente los incrementos acumulados de las longitudes de las 10 fracturas. En esta figura se puede notar el efecto de los niveles de vibración sobre las propagaciones de las diferentes fracturas.

Tabla 1. Incrementos de las longitudes de las fracturas

Device	Hundred thousand of cycles									
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0	0.01	0.02	0.025	0.052	0.058	0.018	0.017	0.06	0.042
2	0	0.09	0.071	0.011	0.075	0.012	0.022	0.09	0.03	0.028
3	0	0.01	0.05	0.021	0.037	0.024	0.016	0.011	0.063	0.03
4	0	0.016	0.06	0.011	0.017	0.023	0.071	0.01	0.01	0.04
5	0	0.036	0.06	0.08	0.028	0.038	0.039	0.044	0.09	0.08
6	0	0.014	0.088	0.01	0.082	0.083	0.012	0.016	0.03	0.056
7	0	0.037	0.027	0.014	0.018	0.028	0.04	0.07	0.02	0.072
8	0	0.035	0.051	0.019	0.069	0.093	0.01	0.07	0.014	0.023
9	0	0.067	0.081	0.013	0.012	0.011	0.034	0.011	0.01	0.046
10	0	0.025	0.027	0.012	0.012	0.075	0.036	0.018	0.017	0.04

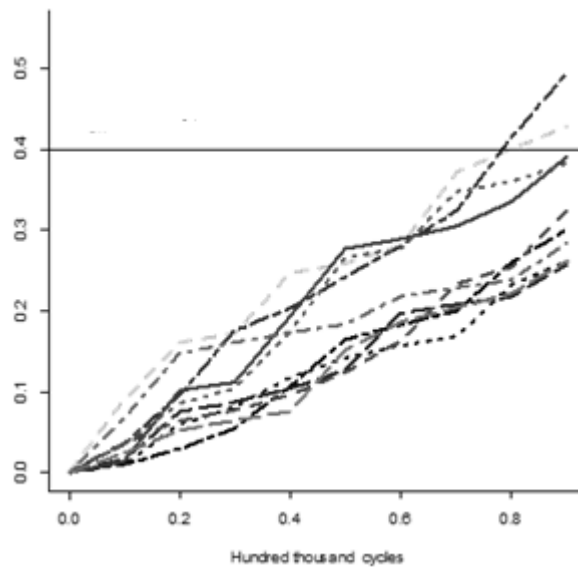


Figura 3. Representación de las propagaciones acumuladas de las fracturas

4.2 El enfoque de modelación propuesto

Como parte de la modelación inicial se considera un proceso no negativo $\{Z(t), t > 0\}$, en donde $Z(t)$ representa la medición para un espécimen en el tiempo t . Específicamente se considera que $Z(t)$ esta descrito por un proceso estocástico gamma. El proceso gamma tiene las siguientes características:

$$- Z(t) - Z(s) = \Delta Z(t) \text{ sigue una distribución gamma } a(v[(t) - (s)], u).$$

- $Z(t)$ tiene incrementos independientes. Es decir, $Z(t_4) - Z(t_3)$ y $Z(t_2) - Z(t_1)$ son independientes $\forall t_1 < t_2 < t_3 < t_4$.

Como parte del proceso gamma se considera que $v(t)$ es un parámetro de forma no-negativo con $t \geq 0$, $v(0) \equiv 0$, y $u > 0$ es un parámetro de escala. Entonces, el proceso gamma $Ga(v(t), u)$ describe el comportamiento de una característica de interés a través del tiempo t que tiene una media $v(t)u$ y varianza $v(t)u^2$, entonces la función de densidad de probabilidad (FDP) de $Z(t)$ esta dada por,

$$f(Z(t) | v(t), u) = \frac{Z(t)^{v(t)-1}}{u^{v(t)}\Gamma(v(t))} \exp\left\{-\frac{Z(t)}{u}\right\} \quad (1)$$

en donde, $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$, $a > 0$.

El momento de una falla T_ω ocurre en el momento en que la trayectoria $Z(t)$ alcanza un nivel critico ω . De manera que, al considerar el valor inicial de la característica de calidad como z^0 y $\xi = \omega - z^0$, se tiene que la función de distribución acumulada (FDA) de T_ω se obtiene como,

$$\begin{aligned} F(t_\omega) &= P(T_\omega \leq t_\omega) = P(Z(t) \geq \xi) \\ &= \int_\xi^\infty f_{Z(t)}(z) dz = \int_\xi^\infty \frac{z^{vt-1}}{u^{vt}\Gamma(vt)} e^{-\left(\frac{z}{u}\right)} dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(vt)} \int_{\xi/u}^\infty x^{vt-1} e^{-x} dx, \end{aligned}$$

en donde, $x = z/u$, la integral en la última ecuación anterior puede ser simplificada considerando la función gamma incompleta $\Gamma(a, b) = \int_b^\infty \zeta^{a-1}e^{-\zeta}d\zeta$. De esta manera, bajo la notación $a = vt$ y $b = \omega/u$, la FDA resulta como,

$$F(t_\omega) = \frac{\Gamma(vt, \xi/u)}{\Gamma(vt)} \quad (2)$$

La FDA en (2) se considera para hacer estimaciones de confiabilidad del producto bajo estudio cuando el nivel inicial (z^0) y el nivel crítico (ω) son constantes y predefinidos.

El enfoque de modelación propuesto considera que z^0 es una variable aleatoria de tal manera que su comportamiento puede ser descrito mediante una FDP $z_i^0 \sim f(z^0|\theta)$. De igual manera, se considera que el nivel crítico ω también es una variable aleatoria descrita como $\omega_i \sim f(\omega|\theta)$, en donde θ puede ser un parámetro o un vector de parámetros. A partir de estas consideraciones se desarrolla la metodología propuesta con la finalidad de obtener la FDA de t_ω al asumir que la característica de calidad de interés es gobernada por un proceso gamma con nivel inicial y crítico aleatorios.

Se puede notar que el denominador de la ecuación (2), el segundo término de la función gamma incompleta considera el término $\xi_i = \omega_i - z_i^0$. Dado que tanto ω_i como z_i^0 son variables aleatorias, entonces el resultado de la resta resulta también en una variable aleatoria denotada como ξ_i . Como primer paso de la metodología para el desarrollo del modelo se considera el uso de la deconvolución para obtener la FDP de ξ_i a partir de las FDP de los componentes de la resta. En términos generales la deconvolución consiste en el proceso inverso de la operación de convolución, la cual considera la distribución de la suma de variables aleatorias independientes. Por ejemplo, considerando las variables aleatorias M y Y , de las cuales se denota la operación $W = M - Y$. Si las FDPs de M y Y son concidas como $f(m)$ y $f(y)$ respectivamente, entonces la FDP de W se puede obtener al considerar las funciones características (FC) de $f(m)$ y $f(y)$, las cuales en términos generales, para cualquier variable aleatoria X con FDP $f(x)$ se pueden obtener como,

$$\varphi_x(\vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\vartheta x\} \cdot f_x(x) dx, \quad (3)$$

en donde, $\varphi_x(\vartheta)$ está definida en una línea real como una función de una variable real ϑ , y $i = \sqrt{-1}$. Las FCs de $f(m)$ y $f(y)$ se pueden obtener al resolver la integral en (3) como $\varphi_m(\vartheta)$ y $\varphi_y(\vartheta)$. De esta manera la FC de W se puede obtener como $\varphi_w(\vartheta) =$

$\varphi_m(\vartheta)/\varphi_y(\vartheta)$. Por otra parte, la FDP de W se puede obtener al considerar la transformada inversa de Fourier de $\varphi_w(\vartheta)$ de la siguiente manera,

$$f(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_w(\vartheta) \cdot \exp\{i\vartheta w\} d\vartheta$$

Específicamente para el enfoque de modelación propuesto se considera que la resta de tanto el nivel crítico como el valor inicial es también una variable aleatoria $\xi_i = \omega_i - z_i^0$, si se tiene información de tanto ω_i como de z_i^0 entonces se puede considerar ciertas funciones para determinar $z_i^0 \sim f(z^0)$ y $\omega_i \sim f(\omega)$, por lo que la función $f(\xi)$ se puede obtener como,

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_z(\vartheta)}{\varphi_\omega(\vartheta)} \cdot \exp\{i\vartheta \xi\} d\vartheta \quad (4)$$

Para algunas FDP específicas de $f(z^0)$ y $f(\omega)$, la función $f(\xi)$ puede resultar en una forma analítica cerrada. Para algunos otros casos la integral en (4) se puede resolver de forma directa o mediante alguna aproximación, tal como el caso del método de deconvolución.

Una vez definida la FDP $f(\xi)$ es necesario determinar la FDA de los tiempos de falla t_ω , la cual se puede obtener al considerar la FDA,

$$F(t_\omega) = \frac{\Gamma(vt, \xi_i/u)}{\Gamma(vt)}$$

en donde, se asume que ξ_i esta descrita por $f(\xi)$ que puede ser obtenida mediante (4). Entonces, al considerar que la variable estocástica $Z(t)$ está gobernada por un proceso gamma, la FDA de t_ω con nivel inicial y nivel critico aleatorio se pue de obtener al resolver la siguiente integral,

$$F_R(t_\omega) = \int_0^\infty \frac{\Gamma(vt, \xi_i/u)}{\Gamma(vt)} \cdot f(\xi) d\xi \quad (5)$$

4.3 El caso específico

Si se considera que tanto $f(z^0|a_{z^0}, b_{z^0})$ y $f(\omega|a_\omega, b_\omega)$ como distribuciones gamma con parámetros de forma (a_z, a_ω) y parámetros de escala (b_z, b_ω) . Entonces, considerando la resta de variables aleatorias $\xi_i = \omega_i - z_i^0$, la función de densidad $f(\xi_i)$ se puede obtener mediante el proceso de deconvolución en (4). Primeramente, se consideran las FCs de $f(z^0|a_{z^0}, b_{z^0})$ y $f(\omega|a_\omega, b_\omega)$, las cuales al considerar distribuciones gamma están dadas por,

$$\varphi_{z^0}(\vartheta) = (1 - bi\vartheta)^{-a_{z^0}}$$

$$\varphi_\omega(\vartheta) = (1 - bi\vartheta)^{-a_\omega}$$

Para este caso se considera que las distribuciones del nivel inicial y del nivel crítico tiene el mismo parámetro de escala, de tal manera que $b_{z^0} = b_\omega = b$, por lo que la función $f(\xi_i)$ se puede obtener como,

$$f(\xi_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_\omega(\vartheta)}{\varphi_{z^0}(\vartheta)} \cdot \exp\{i\vartheta\xi\} d\vartheta$$

$$f(\xi_i) = \frac{\xi^{a_{z^0}-a_\omega-1}}{b^{a_{z^0}-a_\omega}\Gamma(a_{z^0}-a_\omega)} e^{-\left(\frac{\xi}{b}\right)} \quad (6)$$

Una vez definida la función de densidad de ξ_i es posible obtener la FDA de los tiempos de falla, mediante la solución de la integral en (5), la cual queda expresada de la siguiente manera,

$$F_R(t_\omega) = \int_0^\infty \frac{\Gamma(vt, \xi_i/u)}{\Gamma(vt)} \cdot \frac{\xi^{a_{z^0}-a_\omega-1}}{b^{a_{z^0}-a_\omega}\Gamma(a_{z^0}-a_\omega)} e^{-\left(\frac{\xi}{b}\right)} d\xi \quad (7)$$

La integral en nueve se puede resolver al considerar la función hipergeométrica generalizada (Gradshteyn y Ryzhik, 2014; Paroissin y Salami, 2014). La función de confiabilidad puede ser fácilmente obtenida de la siguiente manera,

$$R_R(t_\omega) = F_R(t_\omega)$$

Considerando la información disponible de ω_i y z_i^0 , se estimaron las correspondientes distribuciones gamma de los dos vectores de datos, después se obtuvo la FDP de $f(\xi_i)$ definida en (6). De igual manera se estimaron los parámetros del proceso gamma en (1) considerando los datos de la tabla 1. Al final se programa la función en (7) en el software estadístico R, de manera que se obtuvieron la FDA y la función de confiabilidad para los tiempos de falla. En las figuras (4) y (5) se muestran las respectivas funciones para los dos casos de estudio.

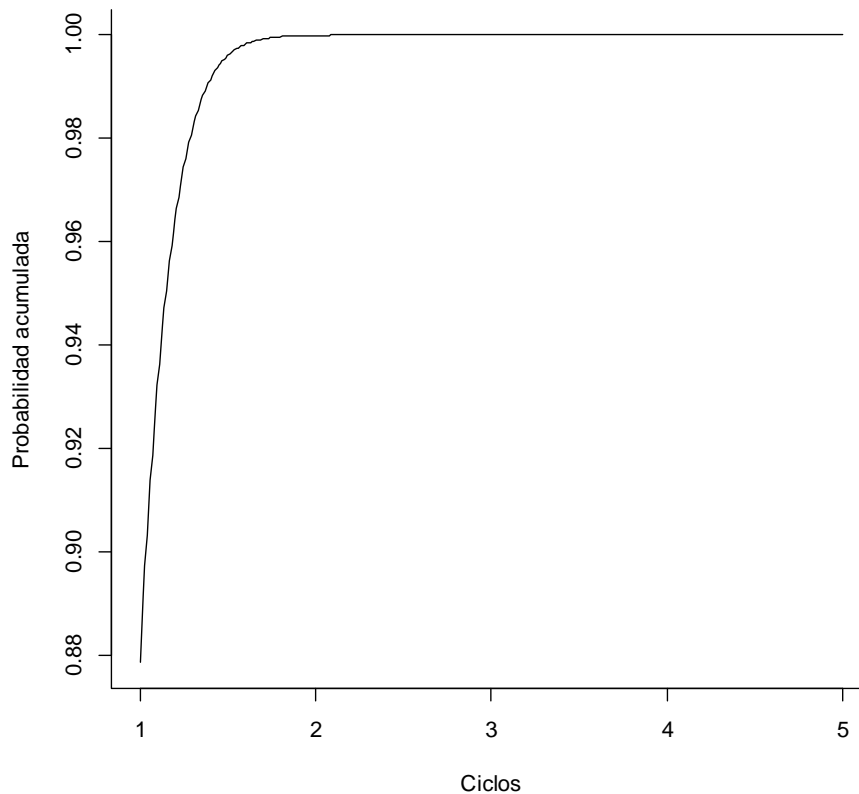


Figura 4. FDA de los tiempos de falla con condiciones aleatorias

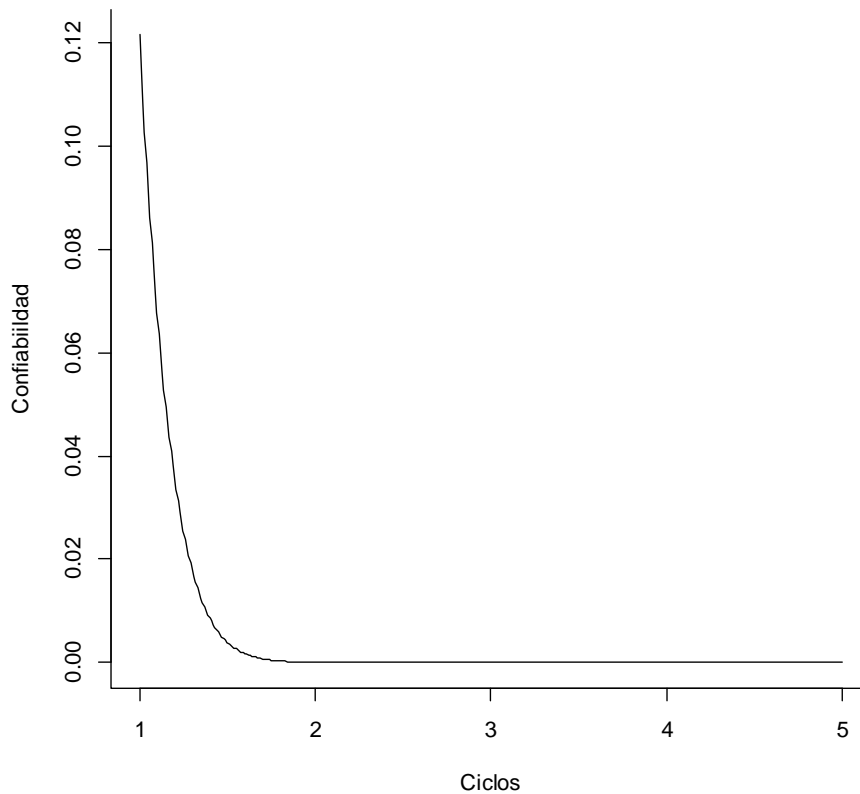


Figura 5. Función de confiabilidad de los tiempos de falla con condiciones aleatorias

5. CONCLUSIONES

En el presente reporte se presenta un enfoque de modelación estocástica considerando que el nivel inicial del proceso y el nivel crítico del mismo son aleatorios. El enfoque consiste inicialmente en aplicar la operación de deconvolución a las variables aleatorias del nivel inicial y el nivel crítico, de manera que la función de la resta de las dos variables resulte en una función paramétrica. La complejidad de la aplicación del proceso de deconvolución depende de la forma paramétrica de las dos funciones asumidas para el nivel crítico y el nivel inicial. Dado que para algunos casos puede resultar en una función paramétrica cerrada definida. En este reporte se considera que ambas distribuciones son distribuciones gamma, de manera que la deconvolución resulta en la distribución resulta en la función definida en (6).

Considerando esta función se obtuvo la FDA de los tiempos de falla del proceso considerando la integral que se presenta en (7). Como se puede notar la solución de la integral resulta en un proceso complejo, la solución a tal integral bajo las condiciones predefinidas se obtuvo mediante el uso del software estadístico R. Como se puede observar en las figuras (4) y (5) fue posible obtener información sobre la calidad del caso de estudio. La función de confiabilidad permite obtener información sobre el desempeño de la propagación de la fractura a través de los niveles de ciclo de vibración. Como se puede notar en los resultados, los objetivos y metas planteados en el proyecto fueron logrados exitosamente, dado que se desarrolló el enfoque de modelación y se logró obtener información sobre la calidad del producto bajo estudio a través de las funciones FDA y de confiabilidad. Como se mencionó anteriormente en este reporte se considera la distribución gamma para modelar el nivel inicial y el nivel crítico, este es tan solo un escenario de los múltiples que se pueden considerar en diferentes aplicaciones, por lo que esta investigación se puede continuar al considerar diferentes funciones y combinaciones. Definitivamente, la determinación de estas FDPs puede resultar en un proceso más complejo de solución para la integral en (7), por lo que aun queda mucho trabajo por hacer en este esquema de modelación propuesto.

REFERENCIAS

1. Ye, Z. S., & Xie, M. (2015). Stochastic modelling and analysis of degradation for highly reliable products. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 31(1), 16-32.
2. Kharoufeh, J. P., & Cox, S. M. (2005). Stochastic models for degradation-based reliability. *IIE Transactions*, 37(6), 533-542.
3. Park, C., & Padgett, W. J. (2006). Stochastic degradation models with several accelerating variables. *IEEE Transactions on Reliability*, 55(2), 379-390.
4. Si, X. S. (2015). An adaptive prognostic approach via nonlinear degradation modeling: Application to battery data. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 62(8), 5082-5096.
5. Gorjian, N., Ma, L., Mittinty, M., Yarlagadda, P., & Sun, Y. (2010). A review on degradation models in reliability analysis. In *Engineering Asset Lifecycle Management* (pp. 369-384). Springer, London.

6. Nikulin, M. S., Limnios, N., Balakrishnan, N., Kahle, W., & Huber-Carol, C. (2010). *Advances in degradation modeling*. Birkhäuser, Boston.
7. Thomas, E. V., Bloom, I., Christophersen, J. P., & Battaglia, V. S. (2012). Rate-based degradation modeling of lithium-ion cells. *Journal of Power Sources*, 206, 378-382.
8. Huang, J., Golubović, D. S., Koh, S., Yang, D., Li, X., Fan, X., & Zhang, G. Q. (2015). Degradation modeling of mid-power white-light LEDs by using Wiener process. *Optics express*, 23(15), A966-A978.
9. Kim, J., Kim, M., Kang, T., Sohn, Y. J., Song, T., & Choi, K. H. (2014). Degradation modeling and operational optimization for improving the lifetime of high-temperature PEM (proton exchange membrane) fuel cells. *Energy*, 66, 41-49.
10. Dong, Q., & Cui, L. (2019). A study on stochastic degradation process models under different types of failure thresholds. *Reliability Engineering & System Safety*, 181, 202-212.
11. Jiang, L., Feng, Q., & Coit, D. W. (2015). Modeling zoned shock effects on stochastic degradation in dependent failure processes. *IEEE Transactions*, 47(5), 460-470.
12. Si, X. S., Wang, W., Hu, C. H., & Zhou, D. H. (2014). Estimating remaining useful life with three-source variability in degradation modeling. *IEEE Transactions on Reliability*, 63(1), 167-190.
13. Zhang, Z., Hu, C., Si, X., Zhang, J., & Zheng, J. (2017). Stochastic degradation process modeling and remaining useful life estimation with flexible random-effects. *Journal of the Franklin Institute*, 354(6), 2477-2499.
14. Li, N., Lei, Y., Guo, L., Yan, T., & Lin, J. (2017). Remaining useful life prediction based on a general expression of stochastic process models. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64(7), 5709-5718.
15. Shen, L., Wang, Y., Zhai, Q., & Tang, Y. (2018). Degradation Modeling Using Stochastic Processes with Random Initial Degradation. *IEEE Transactions on Reliability*.
16. Gradshteyn, I. S., & Ryzhik, I. M. (2014). *Table of integrals, series, and products*. Academic press.

17. Paroissin, C., & Salami, A. (2014). Failure time of non homogeneous gamma process. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 43(15), 3148-3161.

Productos generados

- Elaboración de artículo de investigación:

“Stochastic modeling based on the gamma process with random initial level and random threshold”

Degradation analysis based on the gamma process with random initial degradation and random threshold

Autor 1, Author 2, Author3

Abstract: The stochastic modeling of certain performance characteristics is an important approach for the quality assessment of products and systems. As part of the stochastic modeling, it is possible to consider different sources of variation, such as temporal, unit to unit and measurement error. These sources have been incorporated in different stochastic process in the literature. Another two sources of variation can be found for certain products, specially when the initial level of the process varies from unit to unit and the critical level to obtain reliability assessments also varies from unit to unit. In this paper, a modeling approach is proposed which considers the gamma process to take into account the temporal uncertainty, and also considers the initial level and the critical level as two additional sources of variation. The modeling consists in first obtaining the distribution of the subtraction of the critical level and the initial level via a deconvolution operation. Then the cumulative distribution function of the first passage time distribution is obtained for a special case. This approach is applied to a fatigue crack propagation case study, from which a reliability assessment is performed.

Keyword: Random initial level, random critical level, deconvolution, stochastic process.

1. Introduction

One of the main modeling approaches to describe the behavior of random variables and that has received great relevance in the last years is based on stochastic processes. The application approaches go from modeling the behavior of one or several performance characteristics from a product, which end defining the quality level of the product itself, to the description of chemical and physical phenomenon's (Ye and Xie, 2014; Kharoufeh and Cox, 2007; Si, 2015). Precisely, the use of stochastic processes to characterize the quality of products and systems allows to obtain reliability estimations without the need of hard failure times. In this way, the general modeling consists in the use of a stochastic process to describe the behavior of the performance characteristics in such way that it is possible to extrapolate the behavior to a critical level to obtain pseudo failure times, from which the reliability assessment is performed (Park and Padgett, 2006; Gorjian et al., 2010; Nikulin et al., 2010).

The determination of a critical level is an important consideration of the modeling process given that this value ends defining the variables from which the reliability assessment of the product will be performed (Thomas et al., 2012; Huang et al., 2015; Kim et al., 2014; Dong and Cui, 2019). An example of a critical level can be defined as the minimum level of tension resistance that a certain material must have to perform certain function as a component of a product or system. When the resistance is lower that